Espaços C(K)

Trabalho no âmbito da unidade curricular Seminário e Projecto

João Paulos, Nº 67926

MMA

1 de Fevereiro de 2014

Resumo

Neste projecto é feita uma digressão pelo espaço das funções reais contínuas de K, C(K)- com K um espaço topológico compacto e Hausdorff. Por um lado, explora-se o *carácter universal* dos espaços $C(K)$, no sentido em que todo o espaço normado X é isométrico a um subespaço de $C(K)$, para um dado espaço compacto e Hausdorff K que depende de X. Por outro lado, vamos perceber como é que a topologia de um espaço compacto e Hausdorff K, determina completamente $C(K)$ enquanto espaço normado, enquanto álgebra e ainda enquanto reticulado.

Conteúdo

1 Prólogo

No primeiro capítulo serão tecidos alguns comentários sobre espaços sequenciais. Neste contexto, será brevemente introduzido o conceito de **rede**, ferramenta que nos será muito útil na demonstração de alguns resultados. Dado um espaço normado X, será ainda introduzida uma topologia muito natural no seu dual X^*, a chamada *topologia fraca**. No segundo capítulo, será abordado o carácter universal do espaço $C([0,1])$, culminando no impressionante Teorema de Banach-Mazur. Surpreendentemente, pelo nosso caminho até este resultado iremos tirar partido de um conjunto especial - o conjunto de Cantor. Por seu turno, no terceiro capítulo, abordamos o Teorema de Banach-Stone. Este resultado profundo que relaciona espaços compactos e Hausdorff K e L com os seus espaços $C(K)$ e $C(L)$, será apresentado em duas versões ligeiramente diferentes que coincidem também com duas perspectivas de natureza distinta. A primeira, de carácter mais topológico e a segunda, mais algébrico. Notaremos no entanto que a segunda perspectiva é de certa forma mais *abrangente*. Será ainda exposta a versão do teorema cuja autoria historicamente se atribui a S.Banach. Por fim, no último capítulo estudamos o espaço $C(K)$ do ponto de vista das propriedades de ordem. O objectivo é estabelecer o T.Kaplansky que garante que K e L são homeomorfos se e só se $C(K)$ e $C(L)$ são isomorfos enquanto reticulados. Assim, K enquanto espaço topológico, determina as propriedades de ordem em $C(K)$ e vice-versa. Neste capítulo surgirá ainda o T.Gelfand-Kolmogorov, estabelecendo que a topologia de K determina ainda $C(K)$ enquanto álgebra (e vice-versa). Na verdade, veremos que o T.Banach-Mazur, o T.Kaplansky e o T.Gelfand-Kolmogorov são corolários de um resultado mais geral.

2 Espaços Sequenciais e Redes. Topologia Fraca*

Definição 1 *(Continuidade Sequencial) Dados dois espaços topológicos X,Y e uma função $f : X \to Y$, diz-se que f é sequencialmente contínua se $(x_n \to x) \Rightarrow (f(x_n) \to f(x))$.*

Note-se que é imediato que se f é contínua, então f será sequencialmente contínua. De facto, seja $V \in N_{f(x)}$[1] e note-se que por continuidade de f, temos que $f^{-1}(V) \in N_x$. Então, se $x_n \to x$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq p$ temos que $x_n \in f^{-1}(V)$. Assim, para $n \geq p$ verificamos que $f(x_n) \in V$ e concluimos que $f(x_n) \to f(x)$.

No entanto, é crucial observar que o recíproco pode ser falso. Na verdade, podemos precisar exactamente quando é que num espaço topológico os conceitos de continuidade e de continuidade sequencial coincidem. Note-se que esta observação assume uma importância fulcral na medida em que, por exemplo, quando quisermos provar que uma aplicação é contínua, em geral não o podemos fazer provando que f é sequencialmente contínua. Esta observação usualmente passa despercebida em espaços bem comportados ou *pequenos* - num sentido que já vamos tornar mais preciso - como os espaços com base de vizinhanças contável (dos quais todos os espaços métricos constituem um exemplo), onde as duas formas de continuidade são equivalentes.

Apresenta-se em seguida, talvez um dos exemplos mais simples em que f é sequencialmente contínua mas que não é contínua. Seja X_1 o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, com a topologia de complemento contável, i.e. um subconjunto de X_1 é aberto se e só se o seu complementar em X_1 é um subconjunto contável. Considere-se ainda X_2, o conjunto dos números reais com a topologia constituída pela intersecção dos abertos da topologia de complemento contável e dos abertos da topologia usual em $\mathbb{R}$. Considere-se a aplicação identidade f entre X_1 e X_2. Observe-se agora que quer tem X_1, quer em X_2, as sucessões convergentes são exactamente as sucessões eventualmente constantes : considerando $x_n \to x$, basta tomar $U = \{\mathbb{R} \setminus x_n\} \cup \{x\}$ como vizinhança de x. Assim é imediato concluir que f é sequencialmente contínua. No entanto, f não é contínua, uma vez que a pré-imagem de $]0, 1[$ por f, não é um aberto em X_1, pois o seu complementar não é contável.

Definição 2 *(Conjunto Sequencialmente Aberto) Dado um espaço topológico X e $A \subset X$, diz-se que A é sequencialmente aberto se dada sucessão convergente $(x_n) \subset X \setminus A$, então $x_n \to x$*

[1]Denotamos o conjunto das vizinhanças abertas de um ponto $x \in X$, com X espaço topológico, por N_x.

com $x \notin A$.

É imediato que os abertos $U \subset X$ são sequencialmente abertos : dada sucessão $(x_n) \subset X \setminus U$ convergente para x, se $x \in U$ existe $V \in N_x$ tal que $V \subset U$. Mas assim, existe ordem p tal que se $n \geq p$ temos que $x_n \in V$, o que contraria o facto de que $(x_n) \subset X \setminus U$. Quando num espaço topológico X os conjuntos sequencialmente abertos são abertos, diz-se que X é um **espaço sequencial**. Não é difícil mostrar que :

Teorema 3 *Sejam X,Y espaços topológicos e $f : X \to Y$. Então, X é um espaço sequencial se e só se (f sequencialmente contínua $\Rightarrow$ f contínua).*

Ou seja, é exactamente nos espaços sequenciais que podemos concluir que uma aplicação é contínua apenas verificando que é sequencialmente contínua. Como foi referido anteriormente, os espaços topológicos com base de vizinhanças contável, são espaços sequenciais. De facto, seja $U \subset X$ um conjunto sequencialmente aberto de X e suponha-se, por contradição, que U não é aberto. Assim, existe $x \in U$ tal que em particular, $B_n \cap X \setminus U \neq \emptyset$, com $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma base de vizinhanças contável de x. Escolhendo $x_n \in B_n \cap X \setminus U$, temos uma sucessão em $X \setminus U$ que converge para $x \in U$ e portanto, U não é sequencialmente aberto. Em particular, todo o espaço métrico é um espaço sequencial. Por fim, vale a pena notar que existem espaços sequenciais sem base de vizinhanças contável.

Como nem sempre iremos trabalhar com espaços sequenciais, torna-se útil expandir o conceito de sucessão. Com esta motivação, introduz-se o conceito de rede :

Definição 4 *(Rede) Seja D um conjunto dirigido*[2] *e X um espaço topológico. Uma rede em X é uma aplicação $f : D \to X$.*

Dizemos que uma rede $(x_d)_{d\in D}$ em X converge para $x \in X$ se dado $U \in N_x$ existe $\alpha \in D$ tal que se $\beta \geq \alpha$, então $x_\beta \in U$. Talvez um dos exemplos mais utéis para nós de um conjunto dirigido, é precisamente o conjunto N_x das vizinhanças abertas de um ponto $x \in X$, estabelecendo para $U, V \in N_x$ que $U \leq V$ se e só se $V \subset U$.

Após um breve momento de reflexão, é possível interpretar intuitivamente as redes como *sucessões* especiais, que por serem indexadas em conjuntos potencialmente não contáveis, *nos*

[2]Recorde-se que D é um conjunto dirigido se existir em D uma relação binária reflexiva e transitiva para a qual, dados dois elementos de D, existe um majorante.

permitem chegar mais próximo dos pontos do que usando sucessões usuais e que por serem indexadas em conjuntos potencialmente apenas parcialmente ordenados, *nos permitem chegar por mais direcções aos pontos do que usando sucessões usuais.* Esta forma pouco precisa de interpretar as redes, destaca no entanto um dos principais motivos pelos quais são introduzidas : onde as sucessões *falham* por serem *demasiado pequenas* e *demasiado limitadas* em espaços não sequenciais, as redes asseguram que resultados verdadeiros com sucessões em espaços sequenciais, permanecem verdadeiros com redes em espaços que podem não ser sequenciais. Ora é com isto em mente que provaremos a equivalência entre continuidade e a versão análoga de continuidade sequencial (mas com redes), independentemente do espaço topológico em cause ser sequencial ou não.

Lema 5 *Seja X um espaço topológico. Um subconjunto $U \subset X$ é aberto se e só se qualquer rede convergente $(x_d)_{d\in D} \subset X \setminus U$, é tal que $x_d \to x$, com $x \notin U$.*

Prova: Se por um lado U é aberto, é evidente que, como no caso das sucessões, se $(x_d)_{d\in D} \subset X \setminus U$ é rede convergente, então o limite não pode pertencer a U. Por outro lado, suponha-se que U não é aberto. Então, existe $x \in U$ tal que $\forall V \in N_x$ se tem que $V \cap X \setminus U \neq \emptyset$. Defina-se então a rede $(x_V)_{V\in N_x}$ tal que $x_V \in V \cap X \setminus U$. Concluimos que se trata de uma rede em $X \setminus U$ mas que converge para $x \in U$. ■

Teorema 6 *Sejam X,Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma aplicação. Então, f é contínua se e só se $(x_d \to x) \Rightarrow (f(x_d) \to f(x))$, onde $(x_d)_{d\in D}$ é uma rede qualquer em X.*

Prova: Suponha-se, por contradição, que f não é contínua. Então, existe um aberto $U \subset Y$ tal que $f^{-1}(U)$ não é aberto de X. Assim, pelo lema anterior, existe uma rede $(x_d)_{d\in D} \subset X \setminus f^{-1}(U)$ tal que $x_d \to x$, com $x \in f^{-1}(U)$. Mas, por hipótese, $f(x_d) \to f(x)$ o que é impossível uma vez que $f(x) \in U$, $f(x_d) \notin U$ e U é aberto. Na outra direção, a prova é absolutamente análoga ao caso das sucessões, que foi exibida no início do texto. ■

Para terminar o capítulo, definimos uma topologia muito natural no dual X^* do espaço normado X e estudamos alguns resultados interessantes que advêm da mesma. Uma forma de definir uma topologia é dar uma sub-base para a mesma e é exactamente isso que fazemos. Considerem-se as aplicações $\Phi_x : X^* \to \mathbb{R}$ tal que $\Phi_x(f) = f(x)$. Define-se a topologia fraca* em X^* como sendo a topologia gerada pela sub-base constítuida pelos conjuntos da forma $\{\Phi_x^{-1}(U)\}$, onde $U \subset \mathbb{R}$ são abertos. Rapidamente nos apercebemos que se trata da topologia que X^* herda enquanto subespaço de $\mathbb{R}^X$, com a topologia produto. Assim sendo, a topologia fraca* é a topologia mais fraca em X^* que torna as aplicações Φ_x contínuas. Deve ainda ser claro que os conjuntos $\{f \in X^* : |(f^* - x^*)(x_i)| < \epsilon, i \in \{i_1, ..., i_n\}\}$ para $\epsilon > 0$ são bases de vizinhança de $x^* \in X^*$ nesta topologia.

Recorde-se que a topologia produto permite-nos *domar o infinito*, no sentido em que por exemplo transporta resultados sobre compacidade e continuidade de contextos finitos para contextos infinitos[3]. Como a topologia fraca* é induzida pela topologia produto (em $\mathbb{R}^X$) será de esperar que esta nos forneça o contexto ideal para estudarmos propriedades como a compacidade. Tal será concretizado ainda neste capítulo com o Teorema de Banach-Alaoglu.

Lema 7 *Seja X^* com a topologia fraca*. Então, $f_n \to f$ se e só se $f_n(x) \to f(x)$, para todo $x \in X$.*

Prova: Por um lado, seja $U \in N_{f(x)}$. Como $f_n \to f$, em particular tomando $\Phi_x^{-1}(U)$, temos que existe p tal que se $n \geq p$ então $f_n \in \Phi_x^{-1}(U)$, i.e. $f_n(x) \in U$. Para provar a outra direção, tome-se para qualquer $\epsilon > 0$ e quaisquer $\{i_1, ..., i_n\}$, o conjunto $B_f(\epsilon) = \{g^* \in X^* : |g(x_i) - f(x_i)| < \epsilon, i \in \{i_1, ..., i_n\}\}$. Se $\forall x \in X : f_n(x) \to f(x)$, então em particular para qualquer $i \in \{i_1, ..., i_n\}$ temos que $f_n(x_i) \to f(x_i)$ e portanto, existe p_i tal que para $n \geq p_i$ temos que $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \epsilon$. Tomando $p = \max\{p_i\}$, concluimos que para $n \geq p$ se tem que $f_n \in B_f(\epsilon)$. ■

Lema 8 *Seja X^* na topologia fraca*. Então X^* é um espaço Hausdorff.*

Prova: Sejam $f_1 \neq f_2$ em X^*. Então existe $x \in X$ tal que $f_1(x) \neq f_2(x)$ e como $\mathbb{R}$ é Hausdorff, sejam $U \in N_{f_1(x)}$ e $V \in N_{f_2(x)}$ disjuntos. Assim, $\Phi_x^{-1}(U) \in N_{f_1}$ e $\Phi_x^{-1}(V) \in N_{f_2}$ são disjuntos e X^* é Hausdorf. ■

Teorema 9 *(Teorema de Banach-Alaoglu) Seja X^* na topologia fraca*. Então, $B_{X^*} = \{f \in X^* : ||f|| \leq 1\}$ é um conjunto compacto.*

Prova: Defina-se $K_x = \{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| \leq ||x||\}$, um conjunto compacto de $\mathbb{R}$. Seja $K = \prod_{x \in X} D_x$ na topologia produto, ainda compacto pelo Teorema de Tychonoff. Defina-se agora $\Psi : B_{X^*} \to D$ tal que $\Psi(f) = (f(x))_{x \in X}$. Note-se que Ψ está bem definido pois $|f(x)| \leq ||f||||x||$, com $||f|| = 1$ e portanto $\Psi(f) \in D$. Note-se ainda que Ψ é obviamente injectiva. Além disso, Ψ é

[3] Apenas a título exemplificativo recorde-se o Teorema de Tychonoff.

contínua pois dada rede $f_\alpha \to f$ na topologia fraca*, vimos que $f_\alpha(x) \to f(x)$ para todo $x \in X$. Mas isto é a convergência na topologia produto em D e como tal, $\Psi(f_\alpha) \to \Psi(f)$. De forma muito análoga, verificamos que a inversa de Ψ é contínua, já que $(f_\alpha(x))_{x\in X} \to (f(x))_{x\in X}$ se e só se $f_\alpha(x) \to f(x)$, pois D está na topologia produto. Mas isto é o mesmo que $f_\alpha \to f$ na topologia fraca*. Concluimos que Ψ é um homeomorfismo de B_{X^*} em D e como D é compacto, resta-nos provar que $\Psi(B_{X^*})$ é um conjunto fechado de D. Ora, seja $(f_n(x))_{x\in X)} \to g$. Como D está na topologia produto, $g = (\lim_n f_n(x))_{x\in X}$. Assim, tome-se $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto \lim_n f_n(x)$. Torna-se claro que $\Psi(f) = g$ e que $||f|| \leq 1$. ■

Observe-se que o Teorema de Tychonoff foi fundamental na prova do Teorema de Banach-Alaoglu. Não deixa de ser bastante interessante que na verdade, sob certas condições no Teorema de Tychonoff, os resultados são equivalentes. Esta equivalência torna-se ainda mais profunda se nos lembrarmos da relação entre o Axioma da Escolha e o Teorema de Tychonoff. A próxima parte do capítulo, será dedicada à relação entre o Teorema de Tychonoff e o Teorema de Banach-Alaoglu, não sendo portanto essencial para o resto da leitura - não obstante, estas questões assumem sempre um carácter irresistível e portanto certamente que o leitor não resistirá à tentação de adiar por uns momentos o próximo capítulo!

Note-se que na prova do Teorema de Banach-Alaoglu, como cada conjunto D_x é Hausdorff, enquanto subespaço de $\mathbb{R}$, apenas foi necessária uma instância do Teorema de Tychonoff : dada coleção de espaços topológicos Hausdorff $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$, então $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ é ainda compacto na topologia produto. É exactamente esta versão mais fraca do Teorema de Tychonoff que é equivalente ao Teorema de Banach-Alaoglu. Poderemos portanto concluir no final deste capítulo que o Teorema de Banach-Alaoglu é mais fraco que o Axioma da Escolha, uma vez que se sabe que esta versão fraca do Teorema de Tychonoff é estritamente mais fraca que o Axioma da Escolha.

Lema 10 *Seja A um conjunto de índices. Então, o Teorema de Banach-Alaoglu implica que o cubo $[0,1]^A$ é compacto.*

Prova: Seja $K = [0,1]^A = \{f : A \to [0,1]\}$, com a topologia produto. Dado $a \in A$, seja $\pi_a : K \to [0,1]$ tal que $\pi_a(f) = f(a) \in [0,1]$. Seja $X \subset C(K)$ o espaço vectorial gerado pela base $\{\pi_a\}_{a\in A}$. Pelo Teorema de Banach-Alaoglu, sabemos que B_{X^*} é compacto na topologia fraca*. O objectivo é mergulhar K em B_{X^*} enquanto imagem fechada, permitindo assim concluir o pretendido.

Defina-se $i : K \to B_{X^*}$, tal que $i(f) : X \to \mathbb{R}$ é a aplicação tal que $i(f)(p) = p(f)$, com $p \in X$. É evidente que i é injectiva já que se $f_1 \neq f_2$, então existe $a \in A$ tal que $f_1(a) \neq f_2(a)$ e deste modo, $i(f_1)(\pi_a) \neq i(f_2)(\pi_a)$. Por outro lado, i é contínua pois se $f_\alpha \to f$ concluimos que $i(f_\alpha) \to f$, uma vez que para qualquer $p \in X$ verificamos que $i(f_a)(p) \to i(f)(p)$. De facto, $p(f_\alpha) \to p(f)$, pois dada a topologia produto em K, se $f_\alpha \to f$ é porque $f_\alpha(a) \to f(a)$, para todo $a \in A$. Assim, como $p = \sum_{i=1}^n c_i \pi_{a_i}$, temos que $p(f_\alpha) = \sum_{i=1}^n c_i \pi_{a_i}(f_\alpha) = \sum_{i=1}^n c_i f_\alpha(a_i)$. Ora, $p(f) = \sum_{i=1}^n c_i f(a_i)$ e portanto, $\sum_{i=1}^n c_i f_\alpha(a_i) \to \sum_{i=1}^n c_i f(a_i)$. Além disso, i é uma aplicação aberta : seja $U \subset K$ um aberto e vamos provar que $i(U)$ é aberto em $i(K) \subset B_{X^*}$. Como K está munido com a topologia produto podemos assumir que U é um elemento da base e portanto da forma $U = \cap_{j=1}^n \pi_{a_j}^{-1}(A_j)$, com $A_j \subset [0,1]$ um conjunto aberto. Note-se que $i(U) = i(K) \cap \{\phi \in B_{X^*} : \pi_{a_j}(\phi) \in A_j, j \in \{1, ..., n\}\}$. Como o segundo conjunto da interseção é um aberto na topologia fraca*, por ser interseção finita de abertos, concluimos que $i(U) = i(K) \cap V$, com V aberto um B_{X^*}. Para concluir a prova, resta-nos mostrar que $i(K)$ é fechado em B_{X^*}. Mas para o efeito basta notar que $i(K) = \cap_{a \in A}\{\phi \in X^* : \pi_a(\phi) \in [0,1]\}$ e que portanto se trata de uma interseção de conjuntos fechados de B_{X^*}. ■

Lema 11 *Seja K um espaço topológico compacto e Hausdorff. Então, existe um conjunto de índices A tal que K é homeomorfo a subespaço fechado de* $[0,1]^A$.

Prova: Como K é compacto e Hausdorff, é um espaço topológico normal. Dado aberto $U_\alpha \subset K$ tal que $x \in U_\alpha$, pela regularidade de K - pois se K é normal, é regular -um aberto U_β tal que $x \in \overline{U_\beta} \subset U_\alpha$. Assim, pelo Lema de Urysohn[4] existe $f_{(\beta,\alpha)} : K \to [0,1]$ tal que $f(\overline{U_\beta}) = \{1\}$ e que $f(X \setminus U_\alpha) = \{0\}$. Seja $A = \{(\alpha, \beta) : \overline{U_\alpha} \subset U_\beta\}$, com U_α, U_β abertos de K. Defina-se agora $i : K \to [0,1]^A$ tal que $x \mapsto (f_a(x))_{a \in A}$. Vamos verificar que $i : K \to i(K)$ é de facto um homeomorfismo. Por um lado, é claro que i é injectiva : se $x_1 \neq x_2$ como X é Hausdorff existem $V_1 \in N_{x_1}$ e $V_2 \in N_{x_2}$ disjuntos. Assim, existe $a \in A$ tal que $f_a(x_1) = 1$ e $f_a(x_2) = 0$ (e vice-versa também). O facto de que i é contínua é uma mera consequência de $[0,1]^A$ estar na topologia produto e cada f_a ser contínua pelo Lema de Urysohn. Resta-nos provar que i é uma aplicação aberta: seja $U \subset K$ aberto. A ver que $i(U)$ é ainda aberto, i.e. dado $y \in i(U)$ existe $W \in N_y$ tal que $W \in i(U)$. Ora, seja $y = i(x_0)$ e pela regularidade de K, existe $a \in A$ tal que $f_a(x_0) = 1$ e que $f_\alpha(X \setminus U) = \{0\}$. Tome-se $W = \pi_a^{-1}(]0,1]) \cap i(K)$, aberto de $i(K)$. Verificamos que $y \in W$, uma vez que $\pi_a(y) = f_a(x_0) = 1$ e ainda que $W \subset i(U)$, pois

[4]Seja X um espaço topológico normal e F_1,F_2 fechados disjuntos. Então, o Lema de Urysohn garante a existência de uma função contínua $f : K \to [0,1]$ tal que $f(F_1) = \{1\}$ e $f(F_2) = \{0\}$.

se $z \in W$, então existe $x \in K$ tal que $z = f(x)$ e que $f_a(x) > 0$. Consequentemente, $x \in U$. ■

Teorema 12 *O Teorema de Banach-Alaoglu implica o Teorema de Tychonoff para espaços compactos e Hausdorff.*

Prova: É útil começar com uma observação simples : sejam $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ espaços topológicos e $C_\alpha \subset X_\alpha$conjuntos fechados e defina-se $C = \prod_{\alpha \in A} C_\alpha$. Notando que $C = \cap_{\alpha \in A} \pi_\alpha^{-1}(C_\alpha)$, concluimos que C é fechado de $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Seja então $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma família de espaços compactos e Hausdorff. Pelo lema anterior, sabemos $K_\alpha \hookrightarrow [0,1]^{A_\alpha}$ para um certo conjunto de índices A_α. Seja $K = \prod_{\alpha \in A} [0,1]^{A_\alpha}$ e note-se que $K \approx [0,1]^{\cup_{\alpha \in A} A_\alpha}$. Ora, como $[0,1]^{A_\alpha}$ é Hausdorff e K_α é compacto, então K_α é fechado de $[0,1]^{A_\alpha}$ e assim sendo, K é fechado de $[0,1]^{\cup_{\alpha \in A} A_\alpha}$, pela observação feita no início da prova. Por fim, vimos pelo penúltimo lema que o Teorema de Banach-Alaoglu implica que $[0,1]^{\cup_{\alpha \in A} A_\alpha}$ é compacto e daqui conlcuimos que K é compacto. ■

3 O Teorema de Banach-Mazur

Neste capítulo provamos o Teorema de Banach-Mazur que diz que qualquer espaço normado X separável, pode ser mergulhado isometricamente em $C[0,1]$. É inequivocamente um resultado profundo e poderoso, que *reduz* o estudo de um espaço normado separável qualquer, ao estudo de um espaço de funções contínuas num intervalo compacto de $\mathbb{R}$. Começamos com um lema que é consequência do Teorema de Banach-Alaoglu, que será posteriormente refinado por um intermediário talvez algo surpreendente - o Conjunto de Cantor - até culminar no aguardado Teorema de Banach-Mazur.

Lema 13 *Seja X um espaço normado. Então, existe uma isometria entre X e $C(K)$, para K compacto e Hausdorff.*

Prova: Basta tomar $K = B_{X^*}$, compacto pelo Teorema de Banach-Alaoglu e Hausdorff pela topologia fraca*. Considere-se $\Phi : X \to C(K)$ tal que $x \mapsto \Phi_x$, com $\Phi_x : K \to \mathbb{R}$ tal que $\Phi_x(f) = f(x)$. Note-se que por definição da topologia fraca*, de facto $\Phi_x \in C(K)$. Além disso, Φ_x é claramente linear e temos que Φ é uma isometria, uma vez que $||\Phi(x)|| = \sup_{||f||=1}\{|f(x)|\} = ||x||$, onde a última igualdade é uma consequência do Teorema de Hanh-Banach. ■

Lema 14 *Seja X um espaço normado e separável. Então, B_{X^*} é metrizável.*

Prova: Seja $\{x_n\}$ um subconjunto denso e contável de X. Assim, para $x^*, y^* \in B_{X^*}$, defina-se $d(x^*, y^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(x^*-y^*)(x_n)|}{2^n}$. Como $\{x_n\}$ é denso, d define uma métrica. É evidente que $d(x^*, y^*) \geq 0$ e que d é simétrica. Não é difícil provar a desigualdade triangular e por fim, $d(x^*, y^* = 0$ se e só se $x^* = y^*$ e aqui tiramos partido da separabilidade de X. De facto, se $d(x^*, y^*) = 0$, é porque $|(x^* - y^*)(x_n)| = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, dado $z \in X$ qualquer, como $\{x_n\}$ é denso, existe $x_m \to z$ e portanto, $x^*(z) = \lim_n x^*(x_n) = \lim_n y^*(x_n) = y^*(z)$. Assim, $x^* = y^*$. Resta provar que a topologia induzida por d coincide com a topologia fraca*.

O objectivo será provar que a aplicação identidade id entre B_{X^*} com a topologia fraca* e B_{X^*} com a topologia induzida por d, é na verdade um homeomorfismo. Dada a compacidade do primeiro espaço topológico pelo Teorema de Banach-Alaoglu e dado o facto de que o segundo espaço é Hausdorff, por ser métrico, resta apenas provar que id é contínua[5]. Observe-se que

$$d(x^*, y^*) \leq \max_{1 \leq n \leq M} |(x^* - y^*)(x_n)| \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{2^n} + 2 \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^n},$$

uma vez que $||x^* - y^*|| < 2$. Assim, concluimos que $d(x^*, y^*) < \max_{1 \leq n \leq M} |(x^* - y^*)(x_n)| + 2^{-M+1}$. Escolha-se M tal que $2^{-M+1} < \frac{\epsilon}{2}$. Recorde-se que os conjuntos da forma $N_{x^*}^{i_1,\ldots,i_k} = \{y^* \in X^* : |(y^* - x^*)(x_i)| < \epsilon, i \in \{i_1, ..., i_k\}\}$ são uma base de vizinhanças de x^*. Para concluir que id é de facto contínua, note-se que $N_{x^*}^{1,\ldots,M} \cap B_{X^*} \subset \{y^* \in B_{X^*} : d(x^*, y^*) < \epsilon\}$. ■

Corolário 15 *Dado X espaço normado e separável, então existe uma isometria entre X e $C(K)$, com K compacto e metrizável.*

Prova: Trata-se de uma consequência imediata dos dois lemas anteriores. ■

O próximo resultado é um caso muito particular do Lema 11. Um espaço metrizável é Hausdorff, no entanto nem todos os espaços Hausdorff são metrizáveis[6] e por isso mesmo, sob a hipótese do espaço ser metrizável, podemos tornar o conjunto de índices em causa no Lema 11 contável. Antes de provar o próximo lema, recorde-se que um conjunto compacto e metrizável, tem base contável e portanto é separável.

Lema 16 *Seja K um espaço compacto e metrizável. Então K é homeomorfo a subespaço fechado de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.*

[5]Recorde-se que uma aplicação bijectiva e contínua de um espaço compacto para um espaço Hausdorff, é necessariamente um homeomorfismo.

[6]Por exemplo, um produto não contável de $]0, 1[$ é Hausdorff embora não seja metrizável.

Prova: Seja $\{x_n\}$ um subconjunto contável e denso em K (pelos comentários anteriores, sabemos que existe). Observe-se que podemos considerar, sem perda de generalidade, que a métrica d em K satisfaz $d(x,y) \leq 1$. Assim sendo, defina-se $\Psi : K \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ tal que $x \mapsto (d(x,x_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Como cada componente de Ψ é contínua e $[0,1]^{\mathbb{N}}$ está na topologia produto, temos que Ψ é contínua. Para provar que $K \approx \Psi(K) \subset [0,1]^{\mathbb{N}}$, como K é compacto e $[0,1]^{\mathbb{N}}$ é Hausdorff, resta provar que Ψ é injectiva. Para provar este facto, tiramos partido de que $\{x_n\}$ é denso em K : seja $\Psi(x) = \Psi(y)$. Como tal, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $d(x,x_n) = d(y,x_n)$ e portanto, como existe sucessão $x_m \to x$, concluimos que $x_m \to y$ e como o limite é único, uma vez que K é Hausdorff (pois é métrico), temos que $x = y$. ■

Já conseguimos relacionar um espaço normado e separável X com $C(K)$, onde K é compacto e métrico. Além disso, já conseguimos relacionar K com $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Suponha-se, por um momento, que sabiamos que existe uma função contínua f tal que $K = f([0,1])$. Então, certamente que $C(K)$ seria isométrico a subespaço de $C([0,1])$[7]. É nesta fase que o Conjunto de Cantor -Δ - se revela central, servindo de *tradução contínua* entre os mundos de $[0,1]$ e de $[0,1]^{\mathbb{N}}$. A característica do Conjunto de Cantor Δ que o torna importante neste momento é o facto de que $\Delta \approx \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. É fácil de entender este facto se pensarmos num elemento de Δ como uma sucessão de zeros e dois, provenientes da expansão ternária. Temos assim o seguinte lema :

Lema 17 $[0,1] = f(\Delta)$, *com* f *contínua*[8].

Prova: Basta considerar a aplicação $f : \Delta \to [0,1]$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}$, onde um elemento genérico do Conjunto de Cantor é da forma $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$. ■

Concluimos assim que $C([0,1])$ é isométrico a subespaço (fechado) de $C(\Delta)$. De facto, defina-se $\Psi : C([0,1]) \to C(\Delta)$ tal que $\Psi(g) = g \circ f$. É imediato que Ψ é linear e que é uma isometria, pois $||g|| = \sup_{x\in[0,1]}\{g(x)\} = \sup_{k\in\Delta}\{(g \circ f)(k)\} = ||g \circ f|| = ||\Psi(g)||$. Além disso, $\Psi(C([0,1]))$ é fechado : seja $\{h_n\} \in \Psi(C[0,1])$ tal que $h_n \to h$, com $h_n = g_n \circ f$. Ora se $g_n \circ f \to h$, temos que $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é Cauchy e portanto $g = \lim g_n$ existe. Além disso, como a convergência é uniforme, $g \in C([0,1])$. Assim, $h = g \circ f$ ou seja, $h = \Psi(g)$.

Lema 18 $[0,1]^{\mathbb{N}} = f(\Delta)$, *com* f *contínua.*

[7] Vamos detalhar esta ideia em seguida com $[0,1]$ em vez de K.

[8] É fácil de mostrar que Δ é compacto. Assim, como $[0,1] = f(\Delta)$ e f é contínua, concluimos que $[0,1]$ é compacto. Temos assim uma prova alternativa do Teorema de Heine-Borel.

Prova: Basta notar que $\mathbb{N}$ admite uma partição infinita contável por subconjuntos infinitos contáveis. Deste modo, a cada subconjunto I_n da partição, associamos $\Delta \approx \{0,1\}^{|I_n|}$ e $f_n : \{0,1\}^{|I_n|} \to [0,1]$ contínua. ■

Voltamos agora à tentativa de relacionar um conjunto compacto e métrico K com o Conjunto de Cantor.

Teorema 19 *Qualquer espaço compacto e métrico K é a imagem contínua de Δ.*

Prova: Pelo Lema 16, já sabemos que K é homeomorfo a subespaço fechado de $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Assim, pelo Lema 18, K é a imagem contínua de algum subconjunto fechado de Δ. Deste modo, se provarmos que cada fechado de Δ fôr a imagem contínua de Δ por alguma aplicação g, temos que K é imagem contínua de Δ, por simplies composição. Seja então $F \subset \Delta$ um fechado. Dado $x \in \Delta$, note-se que $d(x,F) = \inf y \in F\{d(x,y)\}$ é atingido por algum y_0, uma vez que F enquanto subespaço fechado de Δ, é compacto[9]. Assim sendo, f é contínua : seja $x_n \to x$ e como F é compacto (e portanto, como Δ é métrico, F é sequencialmente compacto), seja sem perda de generalidade, $f(x_n) \to z \in \Delta$. Então, $d(x_n, f(x_n)) \to d(x,z)$ e $d(x_n, f(x_n)) = d(x_n, F) \to d(x,F)$. Ora, $d(x,F) = d(x,y)$ e como tal, $y = z$. Assim, $f(x_n) \to z = f(x)$. ■

Corolário 20 *Se K é compacto e métrico, $C(K)$ é isométrico a subespaço de $C(\Delta)$.*

Interpretando o significado do corolário anterior, concluimos que $C(\Delta)$ é *universal* - no sentido explicitado no corolário anterior - para a classe $C(K)$, com K compacto e métrico. Notamos agora que dado $f \in C(\Delta)$, pelo Teorema da Extensão de Tietze, existe um prolongamento de f em $C([0,1])$. No entanto, vamos prolongar f de uma forma particular, que nos permitirá dar os últimos passos na prova do Teorema de Banach-Mazur. Ora o complementar de Δ em $[0,1]$ é uma união contável de abertos disjuntos I_n. Assim, temos $I_n =]a_n, b_n[$ com $a_n, b_n \in \Delta$. Basta ligar $f(a_n)$ e $f(b_n)$ por uma recta e temos extensão de $f \in C(\Delta)$, uma aplicação $f^+ \in C[0,1]$. Além disso, $\sup_{0 \le x \le 1} |f^+(x)| = \sup x \in \Delta |f(x)|$ e dados $f, g \in C(\Delta)$ é imediato verificar que $(f+g)^+ = f^+ + g^+$. Concluimos assim que :

Lema 21 *Existe uma extensão de $C(\Delta)$ para $C([0,1])$, que é isometria linear.*

[9] Estamos a usar a métrica $d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{3^n}$, onde a_n e b_n são os coeficientes da expansão ternária de x e de y respectivamente.

O lema anterior e o Corolário 20, permitem-nos facilmente concluir :

Lema 22 *Seja K compacto e métrico. Então, $C(K)$ é isométrico a subespaço de $C([0,1]$.*

Estamos por fim em condições de deduzir como simples corolário, o Teorema de Banach-Mazur.

Teorema 23 *(Teorema de Banach-Mazur) Seja X um espaço normado e separável. Então, existe uma isometria entre X e um subespaço de $C([0,1])$.*

Prova: Pelo Corolário 15, existe uma isometria $i_1 : X \to C(K)$, com K compacto e métrico. Pelo Lema 22, existe uma isometria $i_2 : C(K) \to C([0,1])$. Basta tomar a isometria $i : X \to C([0,1])$, tal que $x \mapsto (i_2 \circ i_1)(x)$. ∎

4 O Teorema de Banach-Stone

Este capítulo é dedicado a um resultado que relaciona de forma muito precisa as aplicações bijectivas e lineares T entre espaços de funções contínuas reais de espaços compactos e Hausdorff e os homeomorfismos entre os próprios espaços. O resultado que terá maior destaque neste capítulo, é o que tradicionalmente é chamado por Teorema de Banach-Stone, sendo uma modificação de um teorema originalmente provado por Banach, que considerava espaços compactos e métricos em vez de espaços compactos e Hausdorff. No entanto, como é mencionado no prólogo, iremos apresentar duas estratégias de prova do Teorema de Banach-Stone distintas, uma com uma vertente mais topológica e geométrica e a outra, num prisma mais algébrico. Estas duas abordagens conduzem-nos a condições ligeiramente diferentes sobre a aplicação T. Especificamente, na primeira abordagem, consideramos T como sendo uma isometria e na segunda abordagem, a aplicação T, *separa pontos.* Terminamos o capítulo com a prova do resultado original provado por Banach.

4.1 1ª Versão do Teorema de Banach-Stone

Lema 24 *Sejam K e L espaços compactos e Hausdorff. Seja $h : K \to L$, um homeomorfismo. Então, $T : C(L) \to C(K)$ tal que $T(f) = f \circ h$, é uma isometria linear sobrejectiva.*

Prova: É imediato verificar que T está bem definido, pois a composição de funções contínuas é ainda uma função contínua. Além disso, é claro que T é aplicação linear, pois $T(f+g) =$

$(f+g)\circ h = (f\circ h) + (g\circ h) = T(f) + T(g)$. Por outro lado, T é um operador contínuo, pois temos $||T(f)|| = \sup\{|f(h(k))|, k \in K\} \leq \sup\{|f(l)|, l \in L\} = ||f||$. Facilmente se percebe que na verdade, T é mesmo isometria : Como h é sobrejectiva, $h(K) = L$ e como tal, é directo que $||T(f)|| = ||f||$. Resta provar que T é sobrejectiva. Como h é injectiva e K é compacto, temos que $h : K \to h(K)$ é homeomorfismo, pois $h(K) \subset L$ é Hausdorff e h restrito a K é aplicação contínua e bijectiva. Seja $g \in C(K)$. O nosso objectivo é provar que existe $f \in C(L)$ tal que $T(f) = g$. Note-se que, pela continuidade da inversa de h, que a aplicação $g \circ h^{-1} : h(K) \to \mathbb{R}$ é contínua e que $h(K) \subset L$ é um subconjunto fechado, pois L é Hausdorff e $h(K)$ é compacto. Assim, pelo Teorema da Extensão de Tietze[10], existe $f \in C(L)$ tal que $f(x) = (g \circ h^{-1})(x)$ se $x \in h(K)$. Assim, $f(h(x)) = g(x)$ para $x \in K$ e concluimos que $T(f) = g$. ■

A primeira versão do Teorema de Banach-Stone não só nos garante que dados espaços compactos e Hausdorff K e L, os espaços $C(K)$ e $C(L)$ são *equivalentes* se e só se K e L forem homeomorfos, como também nos esclarece que na verdade, qualquer isometria linear entre $C(K)$ e $C(L)$ é determinada por um homeomorfismo entre K e L, de um modo muito semelhente ao do lema anterior. Após esta motivação, passamos então a enunciar a 1ª versão do Teorema de Banach-Stone. Em seguida, serão expostos alguns resultados auxiliares que nos permitirão mostrar o aguardado resultado !

Teorema 25 *(Teorema de Banach-Stone (I)) Sejam K e L espaços compactos e Hausdorff. Então, $C(K)$ e $C(L)$ são isométricos se e só se K e L são homeomorfos. Além disso, qualquer isometria linear $T : C(K) \to C(L)$ é da forma $(T(f))(x) = \alpha(x)f(h(x))$, com $h : L \to K$ um homeomorfismo e $|\alpha(x)| = 1$, com $\alpha \in C(L)$.*

Definição 26 *(Espaço Convexo) Seja X um espaço linear sobre $\mathbb{C}$ e $K \subset X$. Diz-se que K é convexo se $\forall x, y \in K$, $\lambda \in]0,1[$ temos que $\lambda x + (1-\lambda)y \in K$.*

Definição 27 *(Ponto de Extremo) Dado X espaço linear e $K \subset X$ um subconjunto convexo, diz-se que $x \in K$ é um ponto de extremo se $x = \lambda y + (1-\lambda)z$, com $\lambda \in]0,1[$ e $y, z \in K$ implica que $x = y = z$.*

Assim, $x \in K \subset X$ é um ponto extremo se não fôr uma combinação convexa de elementos $y, z \in K$, com $y \neq z \neq x$. É fácil verificar que se x é um ponto extremo, então x não pode

[10] T.Extensão Tietze : Seja X um espaço topológico normal e seja $A \subset X$ fechado. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma aplicação contínua. Então, existe $g : X \to \mathbb{R}$ que prolonga f.

ser um ponto interior de K e como tal, os pontos extremos pertencem à fronteira de K. Além disso, é imediato verificar que x é ponto extremo se e só se $K\setminus\{x\}$ ainda é convexo. Denotamos o conjunto dos pontos extremos de K por *ext(K)*.[11]

Lema 28 *Sejam X e Y espaços normados e seja $T : X \to Y$ uma isometria sobrejectiva. Sejam B_X e B_Y as bolas unitárias fechadas de X e Y respectivamente. Então, $T(ext(B_X)) = ext(B_Y)$.*

Prova: Como T é uma isometria, temos que $||x|| = 1$ se e só se $||T(x)|| = 1$ e como T é sobrejectiva, $T(B_X) = B_Y$. Seja $x \in B_X$ e note-se que existem $y, y' \in B_Y$ tais que $T(x) = \frac{y+y'}{2}$. Assim, $T(x) = \frac{T(z)+T(z')}{2}$, com $z, z' \in B_X$. Concluimos que $x = \frac{z+z'}{2}$, pois $T(x) = \frac{y+y'}{2} = \frac{T(z)+T(z')}{2}$ e T sendo uma isometria, é injectiva. Assim, é fácil de constatar apenas por definição que $T(ext(B_X)) \subset ext(B - X)$ e que $T(B_X \setminus ext(B_X)) \subset B_Y \setminus ext(B_Y)$. ■

A primeira abordagem do Teorema de Banach-Stone usa, de forma determinante, uma caracterização *geométrica* do dual de $C(X)$ apartir dos seus pontos extremos. Os dois próximos resultados, cujas técnicas de prova divergem um ponto da linguagem usada neste projecto (e por isso mesmo a respectiva referência à prova é indicada) permitem-nos efectuar essa caracterização. Recorde-se que dado um espaço compacto e Hausdorff X, os *funcionais de avaliação* $\delta_x \in C(X)^*$[12] fornecem-nos um mergulho de X em $C(X)^*$ equipado com a topologia fraca*. Efectivamente, tome-se $i : X \to C(X)^*$ tal que $x \mapsto \delta_x$. Pelo Lema de Urysohn, se $x \neq y$ então existe $f \in C(X)$ tal que $\delta_x(f) \neq \delta_y(f)$. Além disso, i é contínua pois dada rede $x_\alpha \to x$, temos que $f(x_\alpha) \to f(x)$, para todo $f \in C(X)$, por continuidade. Ora, dado que $C(X)^*$ está equipado com a topologia fraca*, concluimos que $\delta_{x_\alpha} \to \delta_x$. Como X é compacto e $C(X)^*$ é Hausdorff, temos que i é mergulho. O próximo lema, torna mais preciso qual a imagem deste mergulho.

Lema 29 *A aplicação $i : X \to C(X)^*$ tal que $i : x \mapsto \delta_x$ é um mergulho de X em* $\mathrm{ext}(B_{C(X)^*})$*, tomando a topologia fraca***.*

Prova: Acabámos de constatar nos comentários anteriores que i é um mergulho de X em $C(X)^*$. Além disso, o leitor interessado pode consultar a prova de que $\delta_x \in ext(B_{C(X)^*})$ na referência [14] (lema 3.1.). ■

[11]Note-se em particular que se $x \in$ *ext(K)* e $x = \frac{y+z}{2}$ com $y, z \in K$, então $y = z = x$.

[12]Recorde-se que $\delta_x : C(X) \to \mathbb{R}$ são tais que $\delta_x(f) = f(x)$.

Lema 30 *Se η é um ponto extremo de $B_{C(X)^*}$, existe $x \in X$ tal que $\eta(f) = f(x)$ ou que $\eta(f) = -f(x)$ para todo $f \in C(X)$.*

Prova: O leitor interessado pode consultar a prova na referência [14] (lema 3.2.). ■

Corolário 31 *Seja K compacto e Hausdorff. Então,* $\text{ext}(B_{C(X)^*})$=$\{^+_-\delta_x, x \in K\}$.

Definição 32 *(Operador Adjunto de Banach) Dados X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ um operador linear contínuo, define-se $T^* : Y^* \to X^*$ tal que $T^*(f) = f \circ T$, como o operador adjunto de Banach de T, ou simplesmente o operador adjunto de T.*

Note-se que T^* está bem definido e que T^* é ainda um operador linear contínuo, pois como se pode verificar é um operador limitado. De facto, $||T|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||T(x)|| = \sup_{||x|| \leq 1} \sup_{||f|| \leq 1} |f(T(x))| = \sup_{||f|| \leq 1} ||T^*(f)|| = ||T^*||$.[13]

Lema 33 *Sejam K e L espaços compactos e Hausdorff e seja $T : C(L) \to C(K)$ uma isometria linear sobrejectiva. Então, existe $h : K \to L$ homeomorfismo. Além disso, T é da forma $(Tf)(k) = a(k).(f \circ h)(k)$ para $k \in K$, com $a : K \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $|a(k)| = 1$.*

Prova: Seja $T : C(L) \to C(K)$ uma isometria linear sobrejectiva. É fácil de verificar que $T^* : C(K)^* \to C(L)^*$ é ainda uma isometria linear sobrejectiva e deste modo, de acordo com o Lema 28, T^* estabelece uma bijecção entre *ext*$(B_{C(K)^*})$ e *ext*$(B_{C(L)^*})$. Agora, para cada $k \in K$, considere-se $\delta_k \in ext(B_{C(K)^*})$. Ora, pelo Corolário 31, $ext(B_{C(K)^*}) = \{^+_-\delta_k, k \in K\}$ e consequentemente, existe um único escalar $a(k) =^+_- 1$ tal que $T^*(\delta_k) = a(k)\delta_{h(k)}$, já que $T^*(\delta_k) \in ext(B_{C(L)^*})$ e existe correspondência biunívoca. Assim, defina-se $h : K \to L$ tal que $k \mapsto h(k)$ da forma descrita anteriormente. Defina-se ainda $a : K \to \mathbb{R}$ pela forma sugerida anteriormente, com $|a(k)| = 1$. Em seguida, provamos que h é homeomorfismo e que a é contínua. Note-se que, como K é compacto e L é Hausdorff, basta provar que h é uma aplicação bijectiva contínua. De facto, h é injectiva : Suponha-se que $h(k_1) = h(k_2)$ mas que $k_1 \neq k_2$ e chegamos a contradição. Por um lado, claro que $\delta_{h(k_1)} = \delta_{h(k_2)}$. Por outro lado, $\delta_{k_1} \neq \delta_{k_2}$, pois como foi mencionado anteriormente, podemos mergulhar K em $C(K)^*$ pelos funcionais de avaliação δ_k. Assim, $a(k_1) \neq a(k_2)$ e como tal, $T^*(\delta_{k_1}) = (-1)T^*(\delta_{k_2})$. Assim, concluimos que $\delta_{k_1} + \delta_{k_2} = 0$, ou seja, para toda $f \in C(K)$ temos que $f(k_1) + f(k_2) = 0$. Escolhendo, pelo Lema de Urysohn, $f \in C(K)$ tal que $f(k_1) = 0$ e que $f(k_2) = 1$, chegamos

[13] Recorde-se que, como consequência do Teorema de Hahn-Banach, dado X um espaço normado e $x \in X$, temos que $||x|| = \sup\{|f(x)|, f \in X^*, ||f|| = 1\}$.

ao absurdo que $1 = 0$. Logo, h é injectiva. A sobrejectividade de h advem da sua prórpia definição e do facto de que T^* constitui uma bijecção entre $ext(B_{C(K)^*})$ e $ext(B_{C(L)^*})$ e que $ext(B_{C(L)^*}) = \{^+_-\delta_l, l \in L\}$. Falta-nos provar que h é contínua : Considere-se uma rede $k_\alpha \to k$ e como verificámos em comentários anteriores, $\delta_{k_\alpha} \to \delta_k$ e assim, como T^* é contínua, temos que $T^*(\delta_{k_\alpha}) = a(k_\alpha)\delta_{h(k_\alpha)} \to T^*(\delta_k) = a(k)\delta_{h(k))}$. Escolhendo $g = 1$ em $C(L)$, concluimos que $a(k_\alpha) \to a(k)$ e portanto, a é contínua. Além disso, $\delta_{h(k_\alpha)} \to \delta_{h(k)}$ e de novo, como $i : L \to C(L)^*$ tal que $i(l) = \delta_l$ é um mergulho, concluimos que $h(k_\alpha) \to h(k)$ e portanto, h é contínua. Assim, acabámos de provar que h é um homeomorfismo. Para terminar a prova do resultado, note-se que $(Tf)(k) = (\delta_k \circ T)(f) = (T^*\delta_k)(f) = a(k).\delta_{h(k)}(f) = a(k).(f \circ h)(k)$. ■

Corolário 34 *A primeira versão do Teorema de Banach-Stone enunciada no Teorema 25, é um corolário imediato do Lema 24 e do Lema 33.*

4.2 2ª Versão do Teorema de Banach-Stone

Teorema 35 *(Teorema de Banach-Stone (II)) Sejam K e L espaços compactos e Hausdorff. Então, K e L são homeomorfos se e só se existir uma aplicação linear, bijectiva e que separa pontos, $T : C(K) \to C(L)$. Além disso, T é da forma $T(f)(y) = a(y)f(h(y))$, com $h : L \to K$ um homeomorfismo e com a uma função contínua e que não se anula.*

Note-se que ao exigirmos que T separe pontos[14] em vez de exigirmos que T seja isometria (como na primeira versão do Teorema de Banach-Stone), obtemos condições diferentes sobre a função contínua a. Se T é isometria, $|a| = 1$ e se só exigirmos que T separe pontos, só garantimos que a não se anula. Uma explicação pode ser fornecida por um argumento algébrico : Quando T é uma isometria, T preserva os ideais maximais e quando apenas se exige que T separe pontos, apenas garantimos que uns ideais especiais I_x que serão definido em seguida, são preservados. Na verdade, este pormenor altera dramaticamente aquilo que podemos garantir àcerca da aplicação contínua a, da forma que foi referida.

Antes de seguirmos com a prova da segunda versão do Teorema de Banach-Stone, introduzimos alguma notação. Denotamos por I_x ao conjunto $\{f \in C(X) : \exists V_x : f(V_x) = 0\}$, com $V_x \in N_x$. Denotamos ainda os ideais maximais de $C(X)$ por M_x, sendo os conjuntos da forma $\{f \in C(X) : f(x) = 0\}$. Em seguida, é de notar que se X é um espaço compacto e Hausdorff não vazio, então $C(X)$ é não vazio, contendo em particular a aplicação identidade 1.

[14]Seja $T : C(X) \to C(Y)$, uma aplicação linear. Diz-se que T separa pontos se $fg = 0$ implica que $T(f)T(g) = 0$.

Lema 36 *Seja X compacto e Hausdorff, não vazio. Então, $C(X)$ separa pontos em X. Em particular, é um conjunto não contável.*

Prova: Como X é compacto e Hausdorff, é um espaço de Baire. Assim, se $X = \cup_{n=1} x_n$, uma vez que cada $\{x_n\}$ é um fechado de interior vazio, chegamos a contradição com o Teorema de Baire[15]. Assim, X é não contável e como cada $\{x_n\}$ é um subconjunto fechado de X e como X é um espaço normal, o Lema de Urysohn permite-nos concluir que dados $x_1 \neq x_2$, existe $f_{1,2} \in C(X)$ tal que $f_{1,2}(x_1) = 1$ e $f_{1,2}(x_2) = 0$. ■

Lema 37 *Sejam K e L espaços compactos e Hausdorff. Seja $T : C(K) \to C(L)$ uma aplicação bijectiva, linear e que separa pontos. Então, para todo $x \in K$ existe um único $y \in L$ tal que $T(I_x) = I_y$.*

Prova: Seja, para cada $x \in K$, $ker(T(I_x)) = \cap_{f \in I_x} (Tf)^{-1}(0)$. Provamos em primeiro lugar que $ker(T(I_x)) \neq \emptyset$. Suponha-se, por contradição, que $\forall y \in L \exists f_y \in I_x$ tal que $T(f_y)(y) \neq 0$. Assim, por continuidade, existe $U_y \in N_y$ tal que $T(f_y) \neq 0$. Note-se que $L = \cup_{y \in L} U_y$ e por compacidade, existe subcobertura finita tal que $L = \cup_{i=1}^{n} U_{y_i}$. Seja $V \in N_x$ tal que $f_{y_i}(V) = \{0\}$, já que $f_{y_i} \in I_x$. Seja ainda $g \in C(K)$ tal que $g(x) = 1$ e $g(K \setminus V) = \{0\}$, que existe pelo Lema de Urysohn. Assim, $f_{y_i} g = 0$ e portanto, $T f_{y_i}(T_g) = 0$, uma vez que T separa pontos. Consequentemente, $Tg(U_i) = 0$ se $i \in \{1, ..., n\}$, ou seja $Tg = 0$ e pela injectividade de T, concluimos que $g = 0$, chegando a contradição ! Deste modo, garantimos que de facto $ker(T(I_x)) \neq \emptyset$.

Seja $y \in Ker(T(I_x))$. Vamos provar que $\forall f \in I_x$ temos que $Tf \in I_y$, provando assim a existência. Dividimos a prova em dois casos. Se existe $g \in C(K)$ tal que $Tg(y) \neq 0$ e $fg = 0$, como T separa pontos temos que $Tf = 0$ e assim, $Tf \in I_y$. Se não é esse o caso, então para todo $g \in C(K)$ tal que $g(K \setminus V) = \{0\}$, com $V = f^{-1}(0)$ temos que $Tg(y) = 0$. Seja $W \subset V$ uma vizinhança compacta de x (que existe porque K é normal e porque um subconjunto fechado de compacto, é compacto) e $k \in C(K)$ tal que $k(W) = \{1\}$ e $k(K \setminus W) = \{0\}$, que existe pelo Lema de Urysohn. Note-se que para qualquer $g \in C(K)$ temos que $g = kg + (1-k)g$ e como $(1-k)(W) = \{1\}$, concluimos que $(1-k)g \in I_x$. Assim, se $y \in ker(T(I_x))$, temos que $T((1-k)g)(y) = 0$. Por outro lado, $kg(X \setminus V) = \{0\}$. Logo, $T(kg) = 0$ e segue que $Tg(y) = Tkg(y) + T(1-k)g(y) = 0$, para qualquer $g \in C(X)$. Mas deste modo, T não seria injectiva, o que constitui uma contradição. Logo, $T(I_x) \subset I_y$. Para finalizar a prova, basta

[15] Teorema de Baire : Seja X compacto e Hausdorff e $\{F_n\}$ uma colecção contável de fechados de X com interior vazio. Então, $\cup F_n$ tem ainda interior vazio.

notar que a inclusão no sentido inverso, é consequência de que T^{-1} é também uma aplicação que separa pontos, como é fácil de constatar. ■

Observe-se que podemos definir uma bijecção $\phi : L \to K$, tal que $\phi(y) = x$ se e só se $T(I_x) = I_y$. Pelo lema anterior, temos a garantia de que facto, ϕ é uma bijecção.

Teorema 38 *Sejam K e L compactos e Hausdorff. Se existir uma aplicação $T : C(K) \to C(L)$ que é bijectiva, linear e separe pontos, então K e L são homeomorfos.*

Prova: O nosso objectivo é provar que ϕ definido no comentário anterior, é de facto contínuo. Note-se que sendo uma aplicação bijectiva e sendo K Hausdorff e L compacto, garantimos que $\phi : L \to K$ é um homeomorfismo. Suponha-se, por contradição, que ϕ não é contínuo. Assim, existe uma rede $y_\alpha \to y$ em L, tal que $\phi(y) \to x$, com $x \neq \phi(y)$. Como K é Hausdorff, sejam $U_x \in N_x$ e $U_{\phi(x)} \in N_{\phi(x)}$, vizinhanças disjuntas. Verifique-se ainda que para qualquer $f \in C(K)$ tal que $f(X \setminus U_{\phi(y)}) = \{0\}$, temos que $Tf(y) = 0$. De facto, para α suficientemente grande, $\phi(y_\alpha) \in U_x$ e $f(U_x) = \{0\}$. Como U_x é ainda vizinhança de $\phi_(y_\alpha)$, temos que $f \in I_{\phi(y_\alpha)}$. Pelo Lema 37, concluimos que $Tf \in I_{y_\alpha}$ e portanto, em particular, $Tf(y_\alpha) = 0$ para α suficientemente grande. Assim, $Tf(y) = 0$ pela continuidade de Tf, uma vez que $y_\alpha \to y$.
Seja agora $k \in C(K)$ tal que $k(V) = \{1\}$ e $k(K \setminus U_{\phi(y)}) = \{0\}$, com $V \subset U_{\phi(y)}$ uma vizinhança compacta. *Note-se que já observamos que tal vizinhança e tal função existem, essencialmente porque K é normal e pelo Lema de Urysohn.* Então, $g = kg + (1-k)g$ para qualquer $g \in C(K)$. Como $kg(K \setminus U_{\phi(y)}) = \{0\}$, concluimos que $T(kg)(y) = 0$, pelo que mostrámos no início da prova. Por outro lado, como $(1-k)(V) = \{0\}$, temos que $(1-k)g \in I_{\phi(y)}$. Assim, pelo Lema 37, $T((1-k)g) \in I_y$ e em particular, $T((1-k)g)(y) = 0$. Daqui segue que $Tg(y) = T(kg)(y) + T((1-k)g)(y) = 0$. Mas isto é uma contradição, pois T é sobrejectiva e $C(L)$ é não singular, pelo Lema 36. Logo, concluimos que ϕ é um homeomorfismo. ■

Teorema 39 *Sejam K e L espaços compactos e Hausdorff. Então, qualquer $T : C(K) \to C(L)$, bijectiva e que separe pontos é da forma $T(f)(y) = h(y)f(\phi(y))$, onde $\phi : L \to K$ é um homeomorfismo e h é aplicação contínua e que não se anula.*

Prova: De comentários anteriores, sabemos que temos um homeomorfismo $\phi : L \to K$ tal que $T(I_x) = I_y$, com $\phi(y) = x$. Notemos que basta provar que $TM_x \subset M_y$. De facto, se assim fôr, temos que $ker(\delta_x) \subset ker(\delta_y \circ T)$ e consequentemente existe um escalar $h(y)$ tal que $\delta_y \circ T = h(y)\delta_x$, ou seja, $Tf(y) = h(y)f(\phi(y))$, para qualquer $f \in C(K)$ e $y \in L$. Além disso, como $h = T(1)$ e como T é sobrejectiva, concluimos que h é necessariamente contínua e que não se anula.

Suponha-se, por contradição, que existe $f \in M_x$ tal que $Tf(y) \neq 0$. Note-se que se $x \in int(f^{-1}(0))$, então $f \in I_x$ e como tal, $Tf(y) = 0$. Assim, podemos assumir que $x \in fr(f^{-1}(0))$ e tomar uma rede $\{x_\alpha\}$ em K, tal que $x_\alpha \to x$, com $f(x_\alpha) \neq 0$. Defina-se outra rede $\{y_\alpha\}$ em L, tal que $\phi(y_\alpha) = x_\alpha$. É claro que $y_\alpha \to y$ e portanto seja $\epsilon > 0$ tal que $|Tf(y_\alpha)| > \epsilon$. Definam-se ainda $V_n = \{z \in K : |f(z)| \in [\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}]\}$ e $W_n = \{z \in K : |f(z)| \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}]\}$. É fácil de verificar que pelo menos uma das uniões $V = \cup_n V_n$ ou $W = \cup_n W_n$, contem uma subrede de $\{x_\alpha\}$. Suponha-se portanto, sem perda de generalidade, que $x_\alpha \in V$ para qualquer α. Seja V_n^* um aberto contendo V_n e tal que $V_n^* \cap V_m^* = \emptyset$, sempre que $n \neq m$. Seja ainda $g_n \in C(K)$ tal que $||g_n||_\infty \leq \frac{1}{2n}$ e que $g_n(V_n) = f$ e $g_n(K \setminus V_n^*) = 0$, para cada n. É imediato concluir que $g_n g_m = 0$ sempre que $n \neq m$. Defina-se por fim $g = \sum_n 2n g_n \in C(K)$, por argumentos de convergência uniforme. Note-se que $g = 2nf$ quando restrito a V_n e que cada x_α pertence a um único V_n. Logo, $g - 2nf \in I_{x_\alpha}$, o que implica que $T(g - 2nf) \in I_{y_\alpha}$ e como tal $Tg(y_\alpha) = 2nTf(y_\alpha) \to \infty$, o que é um absurdo visto que $\lim_\alpha Tg(y_\alpha) = Tg(y)$. ■

Corolário 40 *A segunda versão do Teorema de Stone-Banach é um corolário imediato do Teorema 38 e do Teorema 39.*

4.3 Teorema de Banach

Neste capítulo estabelecemos que dois espaços métricos e compactos M e N são homeomorfos se e só se $C(M)$ e $C(N)$ são isométricos. É evidente que o resultado constitui um caso particular do Teorema de Banach-Stone, já que qualquer espaço métrico é Hausdorff. No entanto, exploramos a prova originalmente da autoria de Stefan Banach deste resultados, que prima pela sua extraordinária originalidade. Notemos que dada $f \in C(M)$, como f é contínua e M um espaço compacto, f admite pelo menos um ponto de máximo e de mínimo. Se fôr o caso que existe $x_0 \in M$ tal que $|f(x_0)| > |f(x)|$, se $x \neq x_0$, dizemos que f é um *ponto suave* de $C(M)$. A prova de Banach tira partido de uma caracterização destes pontos e da preservação de pontos suaves por isometrias, apelando à construção de um homemorfismo de uma forma muito natural, ainda que bastante criativa.

Lema 41 *Seja M um espaço compacto e métrico e $f \in C(M)$. Então existe $x_0 \in M$ tal que $|f(x_0)| > |f(x)|$ para $x_0 \neq x$ se e só se para qualquer $g \in C(M)$, o limite $\lim_{h\to 0} \frac{||f+hg||-||f||}{h}$ existe.*

Prova: Suponha-se que $|f|$ tem máximo em dois pontos distintos $x_0 \neq x_1$. Pretendemos mostrar neste caso que o limite não existe. Ora, defina-se $g(x) = d(x, x_1)$ e, por uma questão de simplicidade na apresentação, assuma-se que $f(x_0) > 0$. Então, se $h > 0$, note-se que $||f+hg|| - ||f|| \geq f(x_0) + hg(x_0) - f(x_0) = hg(x_0) > 0$. Como tal, $\liminf_{h \to 0^+} \frac{||f+hg||-||f||}{h} > 0$. Por outro lado, $||f + hg|| - ||f|| \geq |f(x_1) + hg(x_1)| - |f(x_1)| = hg(x_1) = 0$, o que nos permite concluir que $\limsup_{h \to 0^-} \frac{||f+hg||-||f||}{h} \leq 0$. Consequentemente, o limite não existe. Note-se apenas que se $f(x_0) < 0$, podemos escolher $g = -d(x, x_1)$.
Reciprocamente, suponha-se que existe $x_0 \in M$ tal que $|f(x_0)| > |f(x)|$ se $x_0 \neq x$. Seja ainda $g \in C(M)$. Observa-se que para cada h, $f + hg$ tem pelo menos um ponto de máximo $x_h \in M$. Vamos mostrar que $x_h \to x_0$ se $h \to 0$. Como $|f(x_0) + hg(x_0)| \leq |f(x_h) + hg(x_h)|$, é fácil de verificar que $0 \leq |f(x_0)| - |f(x_h)| \leq 2|h|||g||$. Assim, como $2|h|||g|| \to 0$, temos que $\lim_{h \to 0} |f(x_h)| = |f(x_0)|$. Como M é compacto, sendo um espaço métrico é também sequencialmente compacto. Assim, sem perda de generalidade, seja $x_h \to m$, com $m \in M$. Como $|f(x_h)| \to |f(x_0)| > |f(x)|$, se $x \neq x_0$, só podemos ter que $x_h \to x_0$. De facto, se $m \neq x_0$, $|f(x_h)| \to |f(m)| < |f(x_0)|$. Estamos então em condições de provar que o limite existe e até de o calcular. Suponha-se que $f(x_0) > 0$. Então, certamente existe $\epsilon > 0$ tal que se $|h| < \epsilon$, então $f(x_0) + hg(x_0) > 0$. Como $x_h \to x_0$ quando $h \to 0$, podemos escolher h suficientemente pequeno tal que $f(x_h) + hg(x_h) > 0$. Logo, após alguns cálculos, podemos concluir sem dificuldade que $hg(x_0) \leq hg(x_h)$. Dada a continuidade de g, segue que $\lim_{h \to 0} \frac{||f+hg||-||f||}{h} = g(x_0)$. Análogamente, se $f(x_0) < 0$, concluimos que $\lim_{h \to 0} \frac{||f+hg||-||f||}{h} = -g(x_0)$. Assim, o limite existe e é igual a $g(x_0)sgn(f(x_0))$. ∎

Teorema 42 *Sejam M e N espaços compactos e métricos. Então, M e N são homeomorfos se e só se $C(M)$ e $C(N)$ são isométricos.*

Prova: A direção $\Rightarrow$ foi esclarecida no Lema 24. Reciprocamente, suponha que existe $T : C(M) \to C(N)$, uma isometria linear sobrejectiva. Por ser linear e preservar a norma, temos que $\frac{||f+hg||-||f||}{h} = \frac{||Tf+hTg||-||Tf||}{h}$. Como T é sobrejectiva, qualquer $l \in C(N)$ é da forma Tg para algum g e portanto, f é um ponto suave de $C(M)$ se e só se Tf é um ponto suave de $C(N)$. Observe-se agora que para qualquer $x_0 \in M$ existe $f \in C(M)$ tal que $|f(x_0)| > |f(x)|$ se $x_0 \neq x$, usando por exemplo $f(x) = \frac{1}{1+d(x,x_0)}$. Do lema anterior, $\lim_{h \to 0} \frac{||f+hg||-||f||}{h} = g(x_0)sgn(f(x_0))$ para qualquer $g \in C(M)$ e como tal, $\lim_{h \to 0} \frac{||Tf+hTg||-||Tf||}{h}$ existe para qualquer $g \in C(M)$, o que implica que Tf tem um único ponto $y_0 \in N$ tal que $g(x_0)sgn(f(x_0)) = (Tg)(y_0)sgn(Tf)(y_0)$ e tal que se $y \neq y_0$, então $|Tf(y_0)| > |Tf(y)|$. Surge assim um candidato a homeomorfismo entre M e N pela aplicação $\phi(x_0) = y_0$. Verifiquemos que se trata de uma aplicação bijectiva e contínua o que a torna um homeomorfismo, já que M é compacto e N é Hausdorff.

Por um lado, se $\phi(x_0) = \phi(x_1) = y_0$, para qualquer $g \in C(M)$ temos que $|g(x_0)| = |Tg(y_0)| = |Tg(y_1)| = |g(x_1)|$. Tomando $g(x) = d(x, x_0)$, concluimos que $x_0 = x_1$ uma vez que $d(x_1, x_0) = 0$. Assim, ϕ é injectiva. Por outro lado, é também sobrejectiva pois dado $y_0 \in N$, defina-se $k(y) = \frac{1}{1+d(y,y_0)}$. Como $k = Tf$ para algum $f \in C(M)$, concluimos que $|f|$ tem um ponto de máximo único em algum x_0. Assim, por construção de ϕ, temos que $y_0 = \phi(x_0)$. Resta então provar que ϕ é uma aplicação contínua. Ora, suponha-se que $x_n \to x_0$ em M. Assim, para qualquer $g \in C(M)$ temos que $|g(x_n)| \to |g(x_0)|$. Então, se $y_n\phi(x_n)$, temos que $|Tg(y_n)| \to |Tg(y_0|$ para qualquer $g \in C(M)$, uma vez que $g(x_n)sgn(f(x_n)) = Tg(x_n)sgn(Tf(y_n))$. Concluimos assim que para qualquer $k \in C(N)$ temos que $|k(y_n)| \to |k(y_0)|$, uma vez que T é sobrejectiva. Assim, tomando $k(y) = d(y, y_0)$, concluimos que $y_n \to y_0$. ■

5 O Teorema de Kaplansky

5.1 O reticulado C(K). Motivação.

Ao longo deste quinto capítulo, vamos explorar a relação entre K, enquanto espaço topológico compacto e Hausdorff e $C(K)$, enquanto reticulado. Neste primeiro subcapítulo, apresentamos alguns resultados que nos indiciam a forte relação entre $C(K)$, enquanto reticulado e K, enquanto espaço topológico e iremos concluir que $C(K)$, enquanto reticulado, caracteriza a topologia de K. Seguiremos de muito perto um de dois artigos clássicos do matemático Irving Kaplansky (v.[16]), que iniciaram este tipo de caracterizações de espaços topológicos compactos e Hausdorff. No segundo subcapítulo, materializamos a motivação com a prova do Teorema de Kaplansky (*$C(K)$ e $C(L)$ isomorfas enquanto reticulados se e só se K e L são homeomorfos*), enquanto corolário de um resultado que nos irá permitir ainda chegar ao Teorema de Gelfand-Kolmogorov (*$C(K)$ e $C(L)$ são isomorfas enquanto álgebras se e só se K e L são homeomorfos*).

Recorde-se que um reticulado $(L, \wedge, \vee)$ é um conjunto $(L, \leq)$ parcialmente ordenado, tal que para quaisquer $a, b \in L$, existe $M \in L$ tal que $a \leq M$, $b \leq M$ e se $a \leq s$ e $b \leq s$, então $M \leq s$ (escrevendo-se $a \vee b = M$). Além disso, existe $m \in L$ tal que $m \leq a$, $m \leq b$ e se $s \leq a$ e

$s \leq b$, então $s \leq m$ (escrevendo-se $a \wedge b = m$). Como tal, $\wedge$ e $\vee$ são operações binárias, o que sugere uma possível definição algébrica de reticulado. De facto, uma definição equivalente e puramente algébrica de reticulado, é possível.

Dada a definição de reticulado, é fácil perceber que $C(X)$, i.e. o conjunto das funções contínuas $f : X \to \mathbb{R}$, ganha estrutura de reticulado definindo $f \geq g$ se e só se $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \in X$. De facto, $f \wedge g = \min\{f, g\}$ e $f \vee g = \max\{f, g\}$. Apartir de agora, até mencionado o contrário, $C(X)$ irá designar o conjunto de funções contínuas de K, um espaço topológico arbitrário, em R, um conjunto totalmente ordenado e sem elemento maximal ou minimal (evidentemente, um caso particular é $\mathbb{R}$). Notemos à partida que podemos induzir uma topologia em R do seguinte modo : para cada $\alpha \in R$, seja $U(\alpha) = \{\beta \in R : \beta > \alpha\}$ e $L(\alpha) = \{\beta \in R : \beta < \alpha\}$. É fácil de verificar que estes conjuntos formam uma sub-base e é precisamente a topologia gerada por esta, que induzimos em R.

Lema 43 *Sejam $\alpha, \beta \in R$ tais que $\alpha > \beta$. Então, existem vizinhanças $M \in N_\alpha$ e $N \in N_\beta$ tais que se $\gamma \in M$ e $\delta \in N$, então $\gamma > \delta$.*

Prova: Dividimos a prova em dois casos. Primeiro, suponha-se que existe $\eta : \alpha > \eta > \beta$. Neste caso, tome-se $M = U(\eta)$ e $N = L(\eta)$. Caso contrário, tome-se $M = U(\beta)$ e $N = L(\alpha)$. ■

Dizemos que X é $R-$*separado* se para todo $x, y \in X$ e $\alpha, \beta \in R$, existe $f \in C(X)$ tal que $f(x) = \alpha$ e $f(y) = \beta$. Diz-se que X é $R-$*normal* se dados fechados disjuntos $F, G \subset X$, existe $f \in C(X)$ tal que $f(F) = \{\alpha\}$ e $f(G) = \{\beta\}$. Observe-se que se X é R-separado, então é Hausdorff : dados $x \neq y$ em X, seja $f \in C(X)$ tal que $f(x) = \alpha$ e $f(y) = \beta$, supondo sem perda de generalidade que $\alpha > \beta$. Sejam $M \in N_\alpha$ e $N \in N_\beta$, construídas como no lema anterior. Por continuidade, $f^{-1}(M)$ e $f^{-1}(N)$ são abertos (e são disjuntos), tais que $x \in f^{-1}(M)$ e $y \in f^{-1}(N)$. É ainda fácil de verificar que se X é compacto e R-separado, então X é R-normal. Introduzimos agora o conceito de *ideal primo* : Diz-se que $P \in C(X)$ é um ideal primo se $f \in P$ e $g \leq f$, implicam que $g \in P$. Por fim, dizemos que P é um *ideal primo associado com x*, se existe $x \in X$ tal que se $f \in P$ e $g(x) < f(x)$, então $g \in P$. O próximo lema caracteriza os ideais primos associados num espaço X compacto.

Lema 44 *Seja X compacto. Então, qualquer ideal primo P e $C(X)$ é associado a um ponto. Mais, se X é R-separado, o ponto é único.*

Prova: Suponha-se, por contradição, que P não é associado com nenhum ponto em X e seja $Q = C(X) \setminus P$. Então, para qualquer $x \in X$ existem $f, g \in C(X)$ tais que $g(x) < f(x)$, com $f \in P$ e $g \in Q$. Pelo lema anterior, $g < f$ numa vizinhança V_x de x : basta tomar $V = V_1 \cap V_2$, com $V_1 = f^{-1}(M)$ e $V_2 = f^{-1}(N)$, para $M \in N_{f(x)}$ e $N \in N_{g(x)}$, construídas como no lema anterior. Mas, por compacidade de X, temos que $X = \cup_{i_1}^k V_{x_i}$. Sejam f_i e g_i as funções correspondentes e seja $h = \vee_{i=1}^k f_i$ e $k = \wedge_{i=1}^k g_i$. Assim, $h > k$, mas $h \in P$ e $k \in Q$, o que é impossível. Além disso, se X é R-separado, suponha-se que P é associado com x_1 e x_2 distintos. Sejam $m \in P$ e $n \in Q$. Existe $r \in C(X)$ com $r(x_1) < m(x_1)$ e $r(x_2) > n(x_2)$, pois X é R-separado e R não tem elemento maximal nem minimal. Mas então, $r \in P \cap Q$, o que é impossível. ■

Lema 45 *Se dois ideais primos em $C(X)$ são associados com o mesmo ponto, a sua interseção contem um ideal primo.*

Prova: Sejam P_1 e P_2 dois ideais primos de $C(X)$ associados com x. Seja $f \in P_1$ e $g \in P_2$ e tome-se $\alpha = f \wedge g$. Defina-se $P_3 = \{h \in C(X) : h \leq \alpha\}$. É imediato que P_3 é um ideal primo tal que $P_3 \subset P_1 \cap P_2$. ■

Lema 46 *Seja X compacto e R-separado. Sejam P_1, P_2, P_3 ideais primos com $P_3 \subset P_1 \cap P_2$. Então, P_1 e P_2 são associados com o mesmo ponto.*

Prova: Suponha-se que P_1 é associado com x e P_2 é associado com y, com $x \neq y$. Como X é compacto, P_3 é ainda associado com algum $z \neq x$. Seja $f \in P_3$, $g \in C(X) \setminus P_1$ e h tal que $h(z) < f(z)$ e $h(x) > g(x)$. Note-se que tal h existe porque X é R-separado e R não tem elemento maximal nem minimal. Além disso, como $h(z) < f(z)$, temos que $h \in P_3$ e como $h(x) > g(x)$, temos que $h \notin P$. Assim, $h \in P_3 \setminus P_1$, o que é impossível. ■

Lema 47 *Seja X compacto e R-separado. Seja $f_0 \in C(X)$ fixa. Para cada $S \subset X$ defina-se $A(S)$ como sendo a interseção dos ideais primos associados com pontos de S e que contêm f_0. Então, $x \in \bar{S}$ se e só se $A(S) \subset P$, com P ideal primo associado com x.*

Prova: Seja $x \in \bar{S}$, $\alpha > f_0$ e defina-se $P = \{f \in C(X) : f(x) \leq \alpha\}$. Ora, $g \in A(S)$ implica que $g \leq f_0$ em todos os pontos de S e assim, $g(x) \leq f_0(x)$. Logo, $A(S) \subset P$. Reciprocamente, suponha-se que $x \notin \bar{S}$. Assim, $A(S)$ não pode estar contido num ideal primo P associado a x. De facto, suponha-se que $A(S) \subset P$, para P um ideal primo associado a x. Seja $f \in C(X) \setminus P$ e $\alpha \in R$ tal que $f_0 > \alpha$ em $\bar{S}$. Note-se que tal α existe, pois $\bar{S} \subset X$ é compacto, por ser subespaço fechado de espaço compacto e além disso, R não tem elemento maximal. Como X é R-normal, existe $g \in C(X)$ tal que $g(\bar{S}) = \alpha$ e $g(x) > f(x)$. Então, $g \in A(S) \setminus P$, o que é uma contradição. ■

Estamos em condições de tirar conclusões importantes. Estabelecendo que dois ideais primos em $C(X)$ se dizem *equivalentes* se a sua interseção contém um ideal primo, os Lemas 44, 45 e 46 implicam a exitência de uma bijeção entre X e as classes de equivalência de ideais primos. Por outro lado, o Lema 47 mostra-nos que a topologia de X é construída por inclusões entre os ideais primos. Assim, se R é um conjunto totalmente ordenado, sem elemento maximal nem minimal (como por exemplo, $\mathbb{R}$) com a topologia da ordem e X é um espaço topológico compacto e R-separado, concluimos que $C(X)$ enquanto reticulado, caracteriza a topologia de X. Esta observação serve de motivação para a próxima secção deste capítulo, na qual se prova um resultado nesta linha de pensamento, o Teorema de Kaplansky. Este resultado revela-nos que dados K e L espaços compactos e Hausdorff, estes são homeomorfos se e só se $C(K)$ e $C(L)$ são *isomorfos* enquanto reticulados.

5.2 Teorema de Kaplansky. Teorema de Gelfand-Kolmogorov

Neste subcapítulo, provamos o Teorema de Kaplansky, que tal como descrito anteriormente, decreta uma relação muito profunda entre $C(K)$ enquanto reticulado e K enquanto espaço compacto e Hausdorff. Provamos ainda um resultado que relaciona K (enquanto espaço topológico compacto e Hausdorff) e $C(K)$ enquanto álgebra[16], o chamado Teorema de Gelfand-Kolmogorov. Estaremos pois, no final deste capítulo, perante três caracterizações de K : uma dada por $C(K)$ enquanto espaço métrico completo (T.Banach-Stone), outra dada por $C(K)$ enquanto reticulado (T.Kaplansky) e por fim, outra dada por $C(K)$ enquanto álgebra (T.Gelfand-Kolmogorov).

Estabelecemos agora alguma notação. Retomamos $C(X)$ para designar as funções contínuas de X para $\mathbb{R}$. Dado espaço topológico X, seja $A(X) \subset C(X)$ um subespaço linear. Diz-se que $A(X)$ *separa pontos de conjuntos fechados* se dado $x \in X$ e fechado $F \subset X$ tal que $x \notin F$, existe $f \in A(X)$ tal que $f(x) = 1$ e $f(F) = \{0\}$. Se, além disso, f toma valores em $[0,1]$, dizemos que $A(X)$ *separa precisamente pontos de conjuntos abertos.* Dado Y espaço topológico e $A(Y) \subset C(Y)$ um subespaço linear, uma bijecção linear $T : A(X) \to A(Y)$ diz-se um *isomorfismo de ordem* se $f \geq 0$ é equivalente a $Tf \geq 0$. *Apartir de agora, até mencionado o contrário, T designará sempre um isomorfismo de ordem, X,Y são compactos e Hausdorff e* $A(X), A(Y)$

[16] Recorde-se que $C(K)$, com K compacto e Hausdorff, é uma álgebra C^*, com o produto pontual de funções e a involução dada pela conjugação. Além disso, pelo T.Gelfand-Naimark, $C(K)$ é o modelo de todas as álgebras C^* comutativas e com unidade.

contêm as funções constantes e separam precisamente pontos de conjuntos fechados. Além disso, se $f \in A(X)$ ou $f \in A(Y)$, seja $Z(f) = \{x : f(x) = 0\}$. Definimos ainda, para $x_0 \in X$ fixo, $Z_{x_0} = \{Z(Tf) : f \in A(X), f(x_0) = 0, f \geq 0\}$. Antes de continuarmos, recordemos apenas que um isomorfismo de reticulados $\phi : (L, \wedge_L, \vee_L) \to (M, \wedge_M, \vee_M)$ é um homomorfismo de reticulados bijectivo, isto é, uma aplicação bijectiva tal que $\phi(l_1 \wedge_L l_2) = \phi(l_1) \wedge_M \phi(l_2)$ e que $\phi(l_1 \vee_L l_2) = \phi(l_1) \vee_M \phi(l_2)$. É fácil de verificar que no nosso caso -$C(K)$, enquanto reticulado definido no ínicio deste capítulo - um isomorfismo de ordem é um isomorfismo de reticulados.

Lema 48 *Sejam K e L espaços compactos e Hausdorff. Se K e L são homeomorfos, então $C(K)$ e $C(L)$ são isomorfos enquanto reticulados.*

Prova: Seja $h : K \to L$ um homeomorfismo. Então, defina-se $T : C(L) \to C(K)$ tal que $T(f) = f \circ h$. É fácil de verificar que se trata de um isomorfismo de ordem. Por um lado, $f \geq 0$ se e só se $Tf \geq 0$, pois $h(x) \in L$ para todo $x \in K$ e porque h é sobrejectivo e como tal, $f \circ h(K) = f(L)$. Por outro lado, por um argumento análogo ao usado no Lema 24, temos que T é sobrejectivo. Como T é claramente injectiva, concluimos que de facto se trata de um isomorfismo de reticulados. ■

Lema 49 *Para qualquer $x_0 \in X$, Z_{x_0} tem a propriedade de interseção finita.*

Prova: Suponha-se que $f_i \in A(X)$, $f_i(x_0) = 0$ e $f_i \geq 0$, para $i \in \{1, ..., n\}$. Vamos provar que $\cap_{i=1}^n Z(Tf_i) \neq \emptyset$. Ora, defina-se $f = \sum_{i=1}^n f_i$. É imediato constatar que $f \in A(X)$, $f \geq 0$ e que $f(x_0) = 0$. Em particular, $Tf \geq 0$, por linearidade. Se $Z(Tf) = \emptyset$, então $Tf(y) > 0$, para todo $y \in Y$. Assim, existe $\epsilon > 0$ tal que $Tf - \epsilon T1_X \geq 0$. Assim, por linearidade e uma vez que T preserva a ordem, $f - \epsilon 1_X \geq 0$, o que é falso já que $f(x_0) = 0$. Como tal, concluimos que existe $y_0 \in Y$ tal que $Tf(y_0) = 0$. Logo, $\sum_{i=1}^n Tf_i(y_0) = 0$ e como $Tf_i \geq 0$, concluimos que para todo $1 \leq i \geq n$ temos que $Tf_i(y_0) = 0$ e consequentemente, $y_0 \in \cap_{i=1}^n Z(Tf_i)$. ■

Designe-se por $\cap Z_{x_0}$ a interseção de todos os elementos de Z_{x_0}. Observe-se que por este lema, $\cap Z_{x_0}$ e $\cap Z_{y_0}$ são conjuntos não vazios, para $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. De facto, notando que Z_{x_0} é fechado - pois é a união de $Z(Tf)$, que são conjuntos fechados, por continuidade - por ser subconjunto de Y que é compacto, é igualmente compacto. Assim, como pelo lema anterior Z_{x_0} tem a propriedade da interseção finita, concluimos que $\cap Z_{x_0}$ é não vazio. Analogamente concluimos o mesmo para $\cap Z_{y_0}$.

Lema 50 *Seja $x_0 \in X$ e $y_0 = f(x_0)$, para $f \in A(X)$. Então, $y_0 \in \cap Z_{x_0}$ se e só se $y_0 \in \cap Z_{y_0}$.*

Prova: Suponha-se, por contradição, que $y_0 \in \cap Z_{x_0}$ mas que $x_0 \notin \cap Z_{y_0}$. Seja $x_1 \in \cap Z_{y_0}$. É claro que $x_1 \neq x_0$ e assim, existe $f \in A(X)$ tal que $f(X) \subset [0,1]$, com $f(x_1) = 1$ e $f(x_0) = 0$, uma vez que $A(X)$ separa precisamente pontos de conjuntos fechados. Como $y_0 \in \cap Z_{x_0}$, temos que $Tf(y_0) = 0$, uma vez que $f \geq 0$ e $f(x_0)$. Como T preserva a ordem, $Tf \geq 0$. Assim, $x_1 \in \cap Z_{y_0}$ implica que $f(x_1) = T^{-1}(Tf)(x_1) = 0$, o que contraria a escolha de f. A prova do recíproco, é perfeitamente análoga. ■

Lema 51 $\cap Z_{x_0}$ *tem apenas um elemento.*

Prova: Já observámos que $\cap Z_{x_0} \neq \emptyset$. Suponha-se, por contradição, que existem $y_1 \neq y_2$ pertencentes a Z_{x_0}. Seja $g \in A(Y)$ tal que $g(Y) \subset [0,1]$, $g(y_1) = 0$ e $g(y_2) = 1$. Pelo lema anterior, $x_0 \in \cap Z_{y_1}$ pois $y_1 \in Z_{x_0}$. Assim, $T^{-1}g(x_0) = 0$, uma vez que $g(y_1) = 0$ e $g \geq 0$. Como $y_2 \in \cap Z_{x_0}$, $T(T^{-1}g)(y_2) = 0$ e assim, $g(y_2) = 0$, o que é falso. ■

Note-se que se K e L são compactos e Hausdorff, então pelo Lema de Urysohn temos que $C(K)$ e $C(L)$ separam precisamente pontos de fechados e claro, contêm as funções constantes. Assim, dado um isomorfismo de ordem $T : C(K) \to C(L)$, pelos comentários e lemas anteriores, surge um candidato natural a homeomorfismo $h : K \to L$, definindo que $h(x_0) = y_0$, com $\{y_0\} = \cap Z_{x_0}$. Nos resultados que se seguem, até mencionado o contrário, a aplicação h será sempre esta que acabamos de definir.

Lema 52 *Para todo $x \in X$ e $y \in Y$, temos que $T1_X(y) > 0$ e $T^{-1}1_Y(x) > 0$.*

Prova: Suponha-se que existe $y_0 \in Y$ tal que $T1_X(y_0) = 0$. Assim, para todo $f \in A(X)$ existe $c \in \mathbb{R}$ não negativo tal que $-c1_X \leq f \leq c1_X$ e consequentemente, por linearidade, temos que $-cT1_X(y_0) \leq Tf(y_0) \leq cT1_X(y_0)$. Assim, $Tf(y_0) = 0$ para qualquer $f \in A(X)$, o que é falso pois $A(Y)$ contem as funções constantes. ■

Teorema 53 *A aplicação $h : X \to Y$ é de facto um homeomorfismo. Mais, temos que $T_f = T1_X.(f \circ h^{-1})$, $\forall f \in A(X), y \in Y$.*

Prova: É fácil de verificar que h é sobrejectiva, pois dado $y \in Y$, tome-se $\cap Z_y = \{x\}$. Assim, $y \in \cap Z_x$ e como tal, $h(x) = y$. Por outro lado, h é injectiva, pois se $x_1 \neq x_2$ são tais que $h(x_1) = h(x_2)$, temos que $h(x_1) \in \cap Z_{x_2}$ e assim, $x_2 \in Z_{h(x_1)}$. Como $x_1 \in \cap Z_{h(x_1)}$ por definição e como $\cap Z_{h(x_1)}$ só tem um elemento, concluimos que $x_1 = x_2$. Por fim, provamos que h é um homeomorfismo, notando que basta provar que h é contínua, uma vez que X é compacto e Y é Hausdorff.

Seja $x_0 \in X$ e $y_0 = h(x_0)$. Seja $f \in A(X)$ e $m = \min\{f(x) : x \in X\}$, que existe uma vez que f é contínua e X é compacto. Dado $\epsilon > 0$, seja $U \in N_{x_0}$ tal que $f(x) > f(x_0) - \epsilon$ para todo $x \in U$, que existe por continuidade de f e porque $x_0 \in U$. Seja ainda $g_1 \in A(X)$ tal que $g_1(X) \subset [0,1]$, com $g_1(x_0) = 1$ e que $g_1(x) = 0$ se $x \in U$, que existe uma vez que $A(X)$ separa precisamente pontos de fechados. Como $1_X - g_1 \geq 0$, $(1_X - g_1)(x_0) = 0$ e $y_0 \in \cap Z_{x_0}$, concluimos que $T(1_X - g_1)(y_0) = 0$ e como tal, $Tg_1(y_0) = T1_X(y_0)$. Além disso, $f - m1_X - (f(x_0) - m - \epsilon)g_1 \geq 0$. Assim, $Tf(y_0) \geq m(T1_X)(y_0) + (f(x_0) - m - \epsilon)(Tg_1)(y_0)$, isto é, $(Tf)(y_0) \geq (T1_X)(y_0)(f(x_0) - \epsilon)$ e como $\epsilon > 0$ é arbitrário, $(Tf)(y_0) \geq (T1_X)(y_0)f(x_0)$. Para a desigualdade no sentido oposto podemos repetir o argumento com $(-f)$. Assim, concluimos que $(Tf)(y_0) = (Tf \circ h)(x_0)$ e portanto, $Tf = T1_X.(f \circ h^{-1})$. Vamos agora provar a continuidade de h. Seja $x_0 \in X$, $y_0 = h(x_0)$ e $V \in N_{y_0}$. Seja $g \in A(Y)$ tal que $g(y_0) = 1$, $g(Y) \subset [0,1]$ e que $g(Y \setminus V) = \{0\}$. Assim $T^{-1}g \geq 0$. Se $T^{-1}g(x_0) = 0$, temos que $y_0 \in Z(T(T^{-1}g)) = Z(g)$, o que contraria o facto de que $g(y_0) = 1 \neq 0$. Logo, $T^{-1}g(x_0) > 0$ e como tal, $U = \{x \in X : (T^{-1}g)(x) > 0\}$ é um aberto de X que contem x_0. Por fim, seja $x \in U$. Resta ver que $h(x) \in V$. Mas $g(h(x)) = T(T^{-1}g)(h(x)) = T1_X(h(x))T^{-1}g(x) > 0$. Logo, $h(x) \in V$. ■

De acordo com comentários anteriores e com os resultados até agora obtidos, podemos concluir que :

Teorema 54 *Sejam K e L espaços compactos e Hausdorff. Seja $T : C(K) \to C(L)$ um isomorfismo linear que preserva a ordem. Então, existe um homeomorfismo $h : K \to L$ tal que $Tf = (T1_X).(f \circ h^{-1})$.*

Teorema 55 *Sejam K e L espaços compactos e Hausdorff. Então :*

1. *(T.Banach-Stone) K e L são homeomorfos se e só se $C(K)$ e $C(L)$ são isométricos. Além disso, se $T : C(K) \to C(L)$ é isometria bijectiva e linear, $Tf = g.(f \circ h^{-1})$, com $h : K \to L$ um homeomorfismo e $g \in C(L)$ tal que $|g| = 1$.*

2. *(T.Kaplansky) K e L são homeomorfos se e só se $C(K)$ e $C(L)$ são reticulados isomorfos. Além disso, se $T : C(K) \to C(L)$ é um isomorfismo de reticulados, $Tf = g.(f \circ h^{-1})$, com $h : K \to L$ um homeomorfismo e $g \in C(L)$ tal que $g > 0$.*

3. *(T.Gelfand-Kolmogorov) K e L são homeomorfos se e só se $C(K)$ e $C(L)$ são álgebras isomorfas. Além disso, se $T : C(K) \to C(L)$ é isomorfismo de álgebras, $Tf = f \circ h^{-1}$, com $h : K \to L$ um homeomorfismo.*

Prova:

1. Ver Corolário 34.

2. Tome-se $g = T1_K$, que pelo Lema 52 é tal que $g(y) > 0$ para todo $y \in L$. O resultado é uma consequência imediata do Lema 48 e do Teorema 54.

3. O resultado é uma consequência imediata da observação que um isomorfismo de álgebras $T : C(K) \to C(L)$ é um isomorfismo que preserva a ordem, tal que $T1_K = 1_L$. Por outro lado, se $h : K \to L$ é um homeomorfismo, então $T : C(L) \to C(K)$ tal que $Tf = f \circ h$ é um isomorfismo de álgebras. De facto, já provámos que a aplicação é necessariamente bijectiva (ver Lema 48). Além disso, é obviamente um homomorfismo de álgebras pois $T(f + g) = Tf + Tg$ e $T(f.g) = (Tf).(Tg)$.

■

Referências

[1] L. Alaoglu, *Weak topologies of normed linear spaces*, Annals of Mathematics **41** (1940), 252 – 267.

[2] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, (French) Chelsea Publishing Co., New York, vii+254, 1955.

[3] N.L. Carothers, *A Short Course on Banach Space Theory*, London Mathematical Society Student Texts, Vol. 64, 2004.

[4] H.E. Lacey, *The Isometric Theory of Classical Banach Spaces*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften bd. **208**, Springer-Verlag, New York 1974.

[5] P. R. Pinto, *Texto de apoio de Análise Funcional*, IST 2013.

[6] J.R. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, 2000.

[7] A. M. Sinclair, *Automatic continuity of linear operators*, London Mathematical Society Lecture Note Series, No. 21. Cambridge University Press, 1976. iii+92 pp.

[8] M. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings in topology*, Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), 375 – 481.

[9] M.I. Garrido, J.A.Jaramillo, *Variations on the Banach-Stone Theorem*, Extracta Mathematicae, Vol.17, No.3, 2002

[10] S.Rossi, *The Banach-Alaoglu theorem is equivalent to the Tychonoff theorem for compact Hausdorff spaces*, arXiv.org¿arXiv:0911.0332v2

[11] M.H.Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc., vol.41, 1937

[12] I.Kaplansky, *Topological Rings*, American J.Math, 1947

[13] H.L.Gan, J.S.Jeang, N.C.Wong, *An algebraic approach to the Banach-Stone theorem for separating linear bijections*, Taiwanese Journal of Mathematics, Vol.6, 2002

[14] R.F.Arens, J.L.Kelley, *Characterizations of the space of continuous functions over a compact Hausdorff space* , AMS ,1947

[15] D.H.Leung, L.Li, *Order isomorphisms on function spaces*

[16] I.Kaplansky, *Lattices of continuous functions*, Bull. Amer. Math. Soc. , vol.53, 1947