A transformada de Gelfand

Projecto em Matemática / Seminário e Monografia,
(semestre 2, 2013/2014)

Joana Matias Correia, n.º 67118

jmcorreia9@gmail.com

Julho de 2014

Conteúdo

Resumo

No contexto das álgebras de Banach comutativas, definimos espectro de um elemento e damos exemplos. Provamos o teorema de Gelfand-Mazur e mostramos que o espectro duma álgebra de Banach A, $\mathrm{sp}(A)$, é um espaço compacto de Hausdorff, a partir do teorema de Banach–Alouglu. Apresentamos a transformada de Gelfand e mostramos que é um homeomorfismo de um espaço compacto de Hausdorff X para $\mathrm{sp}(C(X))$. Mais ainda, quando restringimos o trabalho a álgebras-C^* comutativas, verificamos que é um isomorfismo isométrico-$*$ de uma álgebra-C^* comutativa, A, em $C(\mathrm{sp}(A))$.

1 Introdução

1.1 Motivação

Este trabalho foi desenvolvido no âmbito da disciplina de Projecto em Matemática e pretende fazer uma pequena introdução à temática das álgebras de Banach comutativas, com especial incidência na transformada de Gelfand. Assim, capítulo a capítulo, percebemos a construção das álgebras de Banach comutativas, definimos espectro de Gelfand e acabamos com a demonstração de resultados sobre álgebras-C^* comutativas, utilizando sempre conceitos que vão desde a Álgebra Linear à Topologia, o que contribui para a riqueza do tema.

Pela humildade, conhecimento e capacidade de ensinar, o meu bem-haja ao Professor Paulo Pinto que orientou este trabalho.

1.2 Conteúdo

O trabalho encontra-se estruturado da seguinte forma:

Na secção 3 começamos por relembrar os conceitos de norma, espaço normado e espaço métrico, que vão ser ferramentas essenciais ao longo do trabalho.

Seguidamente, na secção 4, definimos espaço de Banach e apresentamos exemplos. Introduzimos o conceito de operador linear que vai permitir relacionar normas distintas para a mesma álgebra de Banach. Introduzimos a noção de rede que será bastante útil para provar a continuidade de funções e a topologia fraca, que vai aparecer no contexto do teorema de Banach-Alaoglu. Na subsecção 4.3 provamos que se X é um espaço linear de dimensão finita, então X é um espaço de Banach para qualquer norma.

Na secção 5, definimos álgebra de Banach e apresentamos exemplos. Provamos em que condições um elemento duma álgebra de Banach é invertível. Introduzimos a noção de espectro de um elemento e provamos que, em $\mathbb{C}$, o espectro de um elemento numa álgebra de Banach é um conjunto não vazio e compacto. Enunciamos e provamos o teorema de Gelfand-Mazur que diz que se A é uma álgebra de Banach unitária em que todo o elemento não nulo é invertível, então $A \simeq \mathbb{C}$.

Na secção 6, definimos carácter e espectro de uma álgebra. Apresentamos o teorema de Banach-Alaoglu que permite provar que na topologia fraca-$*$, o espectro da álgebra é um espaço compacto de Hausdorff. Apresentamos também a transformada de Gelfand e mostramos algumas propriedades desta; provamos que dado um espaço compacto de Hausdorff X, a transformada de Gelfand é um homeomorfismo de X em $\mathrm{sp}(C(X))$.

Por último, na secção 7, introduzimos as álgebras-C^*. Chegamos ao resultado que nos diz que, dada uma álgebra-C^*, comutativa e com unidade A, a transformada de Gelfand é um isomorfismo isométrico-$*$ de A em $C(\mathrm{sp}(A))$. Provamos um lema do teorema de Banach-Stone.

2 Nota histórica

Arne Beurling (1905-1986) e Norbert Wiener (1894-1964) foram os primeiros matemáticos a desenvolver e a questionar-se sobre muitos dos conceitos que a análise funcional hoje aborda.

No entanto, foi um jovem polaco, Stefan Banach, que, ao escrever a sua tese de doutoramento sobre operações em conjuntos abstractos e a sua apliacação em equações integrais, em 1920, lançou definitivamente as bases para novas teorias que hoje estruturam a análise funcional. Banach (1892-1945) nasceu no antigo império Austro-Húngaro (hoje parte da Polónia) e viveu um dos períodos mais negros da história recente da Europa: a 2.ª Guerra Mundial. A invasão nazi foi responsável pela morte do seu orientador durante o programa doutoral, Antoni Lomnicki, no terrível massacre de 3 de Julho de 1941, mas foi também causadora de atrasos significativos no desenvolvimento de uma área tão recente da matemática e do conhecimento em geral.

Em resultado do seu trabalho e do contributo de outros matemáticos, são hoje conhecidos os teoremas de Hahn-Banach, Banach-Steinhaus, teorema do ponto fixo de Banach e o teorema de Banach-Alaoglu, que é apresentado no texto.

Israel Gelfand (1913-2009), matemático ucraniano, teve um papel igualmente importante para a análise funcional. Foi aluno do matemático russo, Andrei Kolmogorov, mas tornou-se também ele um dos professores mais respeitados e aclamados. Apenas em 1980, com o dissolver das restrições à emigração impostas pelo governo Soviético, pôde deslocar-se até aos Estados Unidos onde leccionou em Harvard, no Massachusetts Institute of Technology e mais tarde na universidade de Rutgers, New Jersey. Os seus estudos recaíram sobre álgebras de Banach, grupos de Lie e geometria, estudos esses que são hoje amplamente utilizados em medicina, na área de imagiologia.

3 Espaços normados e espaços métricos

3.1 Espaços normados

Definição 3.1. Uma **norma** num espaço linear X é uma aplicação $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ que, para quaisquer $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, com $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, satisfaz as seguintes condições:

(i) $\|x\| \geq 0$;

(ii) $\|x\| = 0$ então $x = 0$;

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ desigualdade triangular.

Um espaço normado X sobre $\mathbb{K}$ é um espaço linear X sobre $\mathbb{K}$ munido com uma norma $\|\cdot\|$. Uma aplicação $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ diz-se uma seminorma se (i), (iii) e (iv) forem satisfeitas pelo que podemos ter $\|x\| = 0$ para $x \neq 0$ se $\|\cdot\|$ for uma seminorma.

Exemplo 3.1. Seja $X = \mathbb{C}^n \equiv \{(z_1, z_2, \dots, z_n) : z_j \in \mathbb{C}\}$ com

$$\|(z_1, z_2, \dots, z_n)\| = (\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2)^{\frac{1}{2}};$$

esta é a norma Euclidiana. O espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ define-se de forma idêntica; nesse caso, restringimo-nos aos escalares em $\mathbb{R}$.

Exemplo 3.2. Seja $X = \mathbb{C}^n$ com $\|(z_1, z_2, \dots, z_n)\| = \max\{|z_j|: 1 \leq j \leq n\}$.

Exemplo 3.3. Seja $K = [0, 1]$, ou mais geral, qualquer espaço compacto de Hausdorff, e seja $C(K)$ o espaço vectorial das funções complexas e contínuas em K, com a adição pontual e a multiplicação por escalares. Definida a norma em $C(K)$ por $\|f\| = \max\{|f(y)|: y \in K\}$ obtém-se um espaço normado.

Exemplo 3.4. Seja $X = C([0, 1])$ e defina-se

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|.$$

$\|\cdot\|_\infty$ define uma norma sobre $C([0, 1])$.

Exemplo 3.5. Dado $p \geq 1$, seja $l^p = l^p(\mathbb{N})$ o conjunto de todas as sucessões $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ de números complexos (indexado pelos inteiros positivos $\mathbb{N}$) para as quais $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty$. Defina-se a norma de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^p$ por

$$\|(a_n)\|_p \equiv \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Podemos incluir o caso em que $p = \infty$ modificando a definição para:

$$l^{\infty} = \{(a_n)_{n=1}^{\infty} : \sup_n |a_n| < \infty\} \quad \text{e} \quad \|(a_n)\|_{\infty} = \sup_n |a_n|.$$

O próximo teorema mostra que um espaço normado é um espaço métrico não sendo verdade, em geral, o contrário.

3.2 Espaços métricos

Definição 3.2. Uma **distância**, ou métrica, em X é uma aplicação $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer $x, y, z \in X$, satisfaz as seguintes condições:

(i) $d(x, y) \geq 0$ não negatividade;

(ii) $d(x, y) = 0$ se e só se $x = y$ identidade;

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$ simetria;

(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ desigualdade triangular.

Dizemos que X é um **espaço métrico** sempre que se fixa uma métrica em X.

Teorema 3.3. *Se $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço normado, $d(x, y) := \|x - y\|$ define uma métrica em X que, para quaisquer $x, y, z \in X$ e $\lambda \in K$, satisfaz:*

1. $d(x + y, x + z) = d(y, z)$ *invariância por translações;*

2. $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$.

Reciprocamente, se (X, d) for um espaço métrico e X um espaço linear tal que d satisfaz (1) e (2), então, $\|x\| := d(x, 0)$ define uma norma em X.

Exemplo 3.6. O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ munido com $d(x, y) = |x - y|$ é um espaço métrico. O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ munido com a mesma métrica também é um espaço métrico.

Definição 3.4. Seja X um espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$. Um **produto interno** é uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ que satisfaz para todo o x, y e $z \in X$ e escalar $\alpha \in \mathbb{C}$,

(i) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ para todo o $x, y \in X$;

(ii) $\langle x, x \rangle \geq 0$, com $\langle x, x \rangle = 0$ se e só se $x = 0$;

(iii) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;

(iv) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$.

Proposição 3.5. *Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno num espaço vectorial X, então para todo o x e y temos*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

Que representa a forma usual da desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Proposição 3.6. *Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno num espaço vectorial X, então*

$$\|x\| \equiv \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$$

é uma norma em X.

Demonstração. Vamos apenas mostrar que a norma verifica a desigualdade triangular.

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \quad \text{Desigualdade de Cauchy-Schwarz} \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2.
\end{aligned}$$

Onde **Re** representa a parte real do número complexo z. □

4 Espaços de Banach

Definição 4.1. Seja (X, d) um espaço métrico. Uma sucessão (x_n) de elementos em X diz-se uma **sucessão de Cauchy** se $d(x_n, x_m) \to 0$ quando $n, m \to \infty$, i.e., dado

$$\epsilon > 0 \quad \underset{N}{\exists} \quad \underset{m,n \geq N}{\forall} \quad d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

Definição 4.2. Um espaço métrico (X, d) diz-se completo se toda a sucessão de Cauchy em X converge em X.

Definição 4.3. Seja X um espaço linear normado. Se X é completo para a métrica d definida a partir da norma por $d(x, y) = \|x - y\|$, então X é um **espaço de Banach**.

Exemplo 4.1. $\mathbb{R}$ é um espaço de Banach quando munido com a norma $\|\lambda\| = |\lambda|$. Mais geralmente, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ são espaços de Banach quando munidos com a norma

$$\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Exemplo 4.2. Para cada $1 \leq p < \infty$, l^p é um espaço de Banach para a norma $\|\cdot\|_p$.

$$\|x\|_p := (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Exemplo 4.3. O espaço linear l^∞ com $l^\infty = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$ dada a norma $\|(x_n)\|_\infty = \sup_n |x_n|$ é um espaço de Banach.

Nota 4.4. Sabendo que o espaço em causa é um espaço vectorial normado, vamos apenas verificar que $(l^\infty, \|\cdot\|)$ é completo.

Seja $x^1, x^2, \ldots$ uma sucessão de Cauchy em l^∞. Note-se que cada elemento x^n desta sucessão é por sua vez uma sucessão em l^∞ e

$$x^n = (x_1^n, x_2^n, \ldots).$$

Vamos provar que existe um elemento x em l^∞ tal que x^n converge para x. Seja $\epsilon > 0$. Como x^n é uma sucessão de Cauchy, existe um $N > 0$ tal que

$$\|x^n - x^m\|_\infty < \epsilon,$$

para todo o $n, m > N$. Então,

$$\sup_{k=1} |x_k^n - x_k^m| < \epsilon,$$

para todo o $n, m > N$. Em particular, temos que

$$|x_k^n - x_k^m| < \epsilon,$$

para todo o k e $n, m > N$. Isto significa que, para todo o k, a sucessão

$$x_k^1, x_k^2, \ldots$$

é uma sucessão de Cauchy em $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ é completo, existe o limite

$$\lim_{n\to\infty} x_k^n = x_k.$$

Neste momento queremos provar que x^n converge para $x = (x_1, x_2, \ldots)$. Escolha-se um $\epsilon > 0$. Vamos supor que

$$|x_k^n - x_k^m| < \epsilon/2$$

para todo o k e $n, m > N$. Fazendo $m \to \infty$, obtemos

$$|x_k^n - x_k| \leq \epsilon/2.$$

Agora vemos que

$$\sup_{k=1} |x_k^n - x_k| \leq \epsilon/2,$$

ou seja,

$$\|x^n - x\|_\infty \leq \epsilon/2 < \epsilon.$$

Isto implica que x^n converge para x, o que prova que $(l^\infty, \|\cdot\|)$ é completo.

Exemplo 4.4. Seja $F = \{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C} : \exists N = N(x), x_n = 0, \forall x \geq N\}$ com a norma $\|(x_n)\|_\infty = \sup_n |x_n|$. F não é um espaço de Banach. Considere-se a sucessão

$$s_n = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, 0, 0, 0, \ldots\}$$

Então, $(s_n) \in F$ e é Cauchy uma vez que se $n > m$

$$\|s_n - s_m\|_\infty = \|\{0, 0, \ldots, 1/(m+1), 1/(m+2), \ldots, 1/n, 0, \ldots\}\|_\infty = \frac{1}{m+1}$$

No entanto, (s_n) não converge para nenhum elemento de F. Se supuséssemos que convergia para $s = (s_n) \in F$ então existiria um N tal que $x_n = 0$ se $n > N$ e $\|s - s_n\|_\infty > 1/N$ para todo o $n > N$.

4.1 O espaço $L(X,Y)$

Definição 4.5. Dizemos um operador linear $T : X \to Y$ é limitado se existe $k > 0$ tal que
$$\|T(x)\| \leq k\|x\|,$$
para todo o $x \in X$. Se T for um operador linear limitado então definimos $\|T\|$ por
$$\|T\|_{op} := \inf\{k : \|T(x)\| \leq k\|x\|, x \in X\}. \tag{1}$$

Resulta da definição que se T for limitado então $\|T(x)\| \leq \|T\|_{op}\|x\|$, para todo o $x \in X$.

Proposição 4.6. *Se $T : X \to Y$ for um operador linear limitado, temos que*

$$\begin{aligned} \|T\|_{op} &= \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\}. \end{aligned}$$

Demonstração. Seja T uma transformação linear, $\mathcal{B}(0,1)$ a bola de centro na origem e raio 1, S^1 o círculo unitário e A, B os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} A &\equiv \sup\{\|T(v)\| : v \in \mathcal{B}(0,1)\}; \\ B &\equiv \sup\{\|T(w)\| : w \in S^1\}. \end{aligned}$$

Queremos mostrar que

$$\sup\{\|T(v)\| : \|v\| \leq 1\} = \sup\{\|T(w)\| : \|w\| = 1\}.$$

Como $S^1 \subseteq \mathcal{B}(0,1)$ temos imediatamente que $B \leq A$.

Para mostrar que $A \leq B$ verificamos que se $\|v\| \leq 1$ então,

$$\|T(v)\| \leq \frac{\|T(v)\|}{\|v\|} = \left\|\frac{1}{\|v\|}T(v)\right\| = \left\|T\left(\frac{v}{\|v\|}\right)\right\|.$$

Observamos agora que

$$\begin{aligned} A = \sup\{\|T(v)\| : \|v\| \leq 1\} &\leq \sup\left\{\left\|T\left(\frac{v}{\|v\|}\right)\right\| : \|v\| \leq 1\right\} \quad \text{pois } \frac{v}{\|v\|} \in S^1 \\ &\leq \sup\{\|T(w)\| : \|w\| = 1\} = B. \end{aligned}$$

Falta ainda ver que

$$\|T\| = \sup\{\|T(v)\| : \|v\| \leq 1\} = \sup\{\|T(v)\| : \|v\| = 1\} = \sup\left\{\frac{\|T(v)\|}{\|v\|}, v \neq 0\right\}.$$

Por definição, temos que

$$\|T(v)\| \quad \leq \quad \|T\|\|v\| \iff \frac{\|T(v)\|}{\|v\|} \leq \|T\|.$$

Note-se que o resultado é válido para qualquer norma. $\square$

Teorema 4.7. *Seja $T : X \to Y$ um operador linear entre espaços normados. Então as seguintes afirmações são equivalentes*[1]*:*

(i) T é contínuo em algum ponto de X.

(ii) T é contínuo em todos os pontos de X

(iii) T é limitado.

Definição 4.8. $L(X, Y)$ representa o conjunto de todos os operadores lineares limitados entre os espaços normados X e Y. Se $X = Y$, $L(X, Y)$ designa-se por $L(X)$.

Proposição 4.9. *$L(X, Y)$ é um espaço normado quando munido com a norma* (1).

Demonstração. Para $T, S \in L(X, Y)$ e α, β escalares, o operador $\alpha S + \beta T$ é definido de forma habitual: $(\alpha S + \beta T)(x) = \alpha S(x) + \beta T(x)$. Por outro lado, como S, T são limitados, temos

(i) $\|S(x) + T(x)\| \leq \|S(x)\| + \|T(x)\| \leq (\|S\| + \|T\|)\|x\|$,

(ii) $\|\alpha S(x)\| = |\alpha|\|S(x)\| \leq (|\alpha|\|S\|)\|x\|$,

e $L(X, Y)$ é um espaço linear. Falta provar que $\|\cdot\|$ é uma norma.

É claro que $\|T\| \geq 0$. Se $\|T\| = 0$ então,

$$0 = \|T\| = \sup \left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \neq 0 \right\},$$

o que implica $\|T(x)\| = 0$ para todo o $x \neq 0$ e $T = 0$.

Para cada escalar α e $T \in L(X, Y)$ temos,

$$\begin{aligned} \|\alpha T\| &= \sup\{\|\alpha T(x)\| : \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\alpha|\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\} \\ &= |\alpha| \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\} \\ &= |\alpha|\|T\|, \end{aligned}$$

pelo que $\|\alpha T\| = |\alpha|\|T\|$. Finalmente, para $S, T \in L(X, Y)$

$$\begin{aligned} \|S + T\| &= \sup\{\|S(x) + T(x)\| : \|x\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{(\|S\| + \|T\|)\|x\| : \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|S(x)\| : \|x\| \leq 1\} + \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\} \\ &= \|S\| + \|T\|, \end{aligned}$$

verificamos que a desigualdade triangular é verificada e $\|\cdot\|$ é uma norma. □

Proposição 4.10. *Seja X um espaço normado e Y um espaço de Banach. Então, $L(X, Y)$ é um espaço de Banach, quando munido com a norma definida na eq.*(1).

[1] Prova em [7], pág. 38.

Demonstração. Seja $\{T_n\}$ uma sucessão de Cauchy em $L(X,Y)$. Então,

$$\frac{\|T_n(x) - T_m(x)\|}{\|x\|} \leq \sup \left\{ \frac{\|T_n(x) - T_m(x)\|}{\|x\|} \right\} = \|T_n - T_m\| \to 0$$

quando $n, m \to \infty$. Assim, dado $x \in X$, $\|T_n(x) - T_m(x)\| \to 0$ quando $n, m \to \infty$. Portanto, $(T_n(x))$ é uma sucessão de Cauchy em Y. Como Y é um espaço completo, existe $y \in Y$ tal que $(T_n(x)) \to y$, quando $n \to \infty$. Seja $T(x) = y$. Temos que provar que $T \in L(X,Y)$. Em primeiro lugar, temos

$$\begin{aligned} T(\alpha x + x') &= \lim_n T_n(\alpha x + x') \\ &= \lim_n (\alpha T_n(x) + T_n(x')) \\ &= \alpha \lim_n T_n(x) + \lim_n T_n(x') \\ &= \alpha T(x) + T(x'). \end{aligned}$$

Para todos os $x, x' \in X$ e escalar α. Logo $T : X \to Y$ é um operador linear.

Vamos ver agora que T é limitado. Como $T_n - T_m$ é limitado e para n, m suficientemente grandes

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\| \leq \|x\|,$$

e fazendo $n \to \infty$ temos $\|T(x) - T_m(x)\| \leq \|x\|$. Assim, para m suficientemente grande

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &\leq \|T(x) - T_m(x)\| + \|T_m(x)\| \\ &\leq \|x\| + \|T_m\| \|x\|. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\|T(x)\| \leq \|T\| \|x\| \leq \|x\|(1 + \|T_m\|),$$

e, portanto, $\|T\| \leq 1 + \|T_m\|$, i.e., $T \in L(X,Y)$. Falta provar que $T_n \to T$ na norma de $L(X,Y)$. Seja $\epsilon > 0$; então, existe N tal que

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\| \leq \epsilon \|x\|,$$

para $m, n \geq N$, uma vez que (T_n) é uma sucessão de Cauchy. O supremo sobre todos os elementos x tais que $\|x\| \leq 1$ leva-nos a concluir que $\|T - T_m\| \leq \epsilon$ sempre que $m \geq N$. Ou seja, $T_n \to T$ em $L(X,Y)$.

Se $T_n \to T$ em $L(X,Y)$ então $\|T_n\| \to \|T\|$ porque $|\|T_n\| - \|T\|| \leq \|T_n - T\|$. Sejam $S, T \in L(X)$. A composição $S \circ T$ é um operador linear. Como

$$\|(S \circ T)(x)\| = \|S(T(x))\| \leq \|S\| \|T(x)\| \leq \|S\| \|T\| \|x\|,$$

podemos concluir que $S \circ T$ é um operador limitado e

$$\|S \circ T\| \leq \|S\| \|T\|.$$

A composição $S \circ T$ é frequentemente designada por ST. □

Exemplo 4.5. Seja A uma matriz complexa $n \times n$. $x \mapsto Ax$ define um operador linear em $\mathbb{C}^n$(ou $\mathbb{R}^n$). Vamos calcular $\|A\|$ e verificar que A é um operador limitado. A matriz A^*A é uma matriz[2] hermitiana semidefinida positiva pois se $u \neq 0$ for um vector próprio de A^*A associado a λ_i temos

$$\lambda_i \|u\|^2 = \lambda_i \langle u, u\rangle = \langle \lambda_i u, u\rangle = \langle A^*Au, u\rangle = \langle Au, Au\rangle \geq 0.$$

Portanto, A^*A é unitariamente diagonalizável e existe uma matriz unitária U (com $U^{-1} = U^*$) tal que

$$UA^*AU^* = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

onde $\lambda_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, n$ são os valores próprios de A^*A. Seja $\lambda_{\max}$ o maior valor próprio de A^*A. Note-se que

$$\|Ax\|_F^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle = \langle UA^*AU^*y, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |y_i|^2,$$

usando a mudança de variável $x = U^*y$; então

$$\begin{aligned} \|A\|^2 &= \sup\{\|A(x)\| : \|x\| = 1\}^2 = \sup\{\|A(x)\|^2 : \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |y_i|^2 : \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 = 1\} = \lambda_{\max}. \end{aligned}$$

Portanto, $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}}$, onde $\lambda_{\max}$ é o maior valor próprio de A^*A.

4.2 Rede, topologia fraca e espaço dual

Definição 4.11. Um **conjunto directo** é um conjunto $\mathcal{I}$ munido com uma ordem parcial $\leq$ tal que se α e β estão em $\mathcal{I}$, então existe γ em $\mathcal{I}$ tal que $\alpha \leq \gamma$ e $\beta \leq \gamma$.

Por exemplo, se $\mathcal{I}$ representa o conjunto dos inteiros positivos, $\mathbb{N}$, e se considerarmos $\leq$ a ordem usual dos naturais, temos que $(\mathbb{N}, \leq)$ é um conjunto directo.

Definição 4.12. Uma **rede** num conjunto X é um par $((\mathcal{I}, \leq), x)$ onde $(\mathcal{I}, \leq)$ é um conjunto directo e x é uma função de $\mathcal{I}$ para X. Para α em $\mathcal{I}$, representemos $x(\alpha)$ por x_α. A rede representa-se por $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ e o conjunto $\mathcal{I}$ designa-se por conjunto índice da rede. Quando X é um espaço topológico, dizemos que a rede $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ converge para x_0 em X se, para cada conjunto aberto U que contenha x_0, existe um $\alpha \in \mathcal{I}$ tal que $\beta \in \mathcal{I}$ e $\beta \geq \alpha$ implica que x_β está em U.

Definição 4.13. Se X é um espaço linear normado sobre $\mathbb{C}$, um **funcional linear** em X é uma aplicação $T : X \to \mathbb{C}$ que satisfaz $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$, para todos os vectores $x, y \in X$ e para todos os escalares α, β.

Teorema 4.14. *Seja A um subespaço do espaço topológico X. Temos que $x \in \overline{A}$ se e só se existe uma rede de pontos em A que converge para x.*

[2]Uma matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ diz-se hermitiana se $A = A^*$ onde $A^* := \overline{A^T}$.

Teorema 4.15. *Sejam X e Y espaços topológicos. A função $f : X \to Y$ é contínua no ponto x_0 em X se e só se a rede $\{f(x_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ converge para $f(x_0)$ em Y sempre que $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ é uma rede em X que converge para x_0.*

Para maior detalhe sobre os resultados apresentados aconselhamos a leitura de [3].

Introduzimos brevemente o conceito de **topologia fraca**. Começamos com um espaço de Banach X e um espaço vectorial Y, de funcionais lineares em X, suficientemente rico para separar os pontos em X, i.e., dados $x_1 \neq x_2$ em X, existe ω em Y tal que $\omega(x_1) \neq \omega(x_2)$. A topologia fraca-$Y$ em X é a topologia mais fraca (a que contém menos abertos) na qual os funcionais em Y são contínuos. Ou seja, queremos que $\omega : X \to \mathbb{C}$ seja contínuo para cada $\omega \in Y$, para que, cada um dos conjuntos $\{\omega^{-1}(U) : \omega \in Y \text{e } U \text{aberto em } \mathbb{C}\}$ é um conjunto aberto e fraco-Y em X, bem como todas as uniões de intersecções finitas de tais conjuntos. Ao exigir que Y separa os pontos em X, podemos garantir que a topologia fraca-Y é Hausdorff, como se segue: Se $x_1 \neq x_2$ podemos descobrir um $\omega \in Y$ tal que $\omega(x_1) \neq \omega(x_2)$. Encontramos dois abertos disjuntos U_1 e U_2 em $\mathbb{C}$ que contenham, respectivamente, $\omega(x_1)$ e $\omega(x_2)$. Os conjuntos $\omega^{-1}(U_1)$ e $\omega^{-1}(U_2)$ são conjuntos abertos e fracos-Y em X, que são disjuntos e que contêm x_1 e x_2 respectivamente.

Definição 4.16. Seja X um espaço normado. O **espaço dual de** X é o espaço $L(X, \mathbb{K})$ dos funcionais limitados de X em $\mathbb{K}$. Designa-se por $X^* := L(X, \mathbb{K})$ o dual de X.

Assim, a topologia fraca-$*$ no espaço dual é a topologia mais fraca que permite que os funcionais lineares de A^* para $\mathbb{C}$ sejam contínuos.

Definição 4.17. Seja X um espaço normado. A topologia fraca-$*$ em X é a topologia fraca $\sigma(X^*, \omega(X))$. Assim, uma sucessão (ou rede) $\{f_i\} \subseteq X^*$ converge para f na topologia fraca-$*$(escrevendo-se $f_i \overset{w^*}{\to} f$) se e só se

$$f_i(x) \to f(x), \text{ para cada } x \in X.$$

A topologia fraca-$*$ designa-se também por topologia da convergência pontual.

4.3 Espaços de Banach de dimensão finita

Definição 4.18. Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sobre o mesmo espaço vectorial X são ditas equivalentes se existirem constantes reais positivas k_1,k_2 $(k_1 \leq k_2)$ tais que:

$$k_1\|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1 \leq k_2\|\boldsymbol{x}\|_2 \qquad \forall \boldsymbol{x} \in X.$$

Teorema 4.19. *Seja X um espaço linear de dimensão finita e $\{e_1, \ldots, e_r\}$ uma base ordenada de X.*

(i) Considere a norma em X definida por $\|x\|_2 := (\sum_{i=1}^{r}|\alpha_i|^2)^{\frac{1}{2}}$, onde $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_r e_r$. Então, $(X, \|\cdot\|_2)$ é um espaço de Banach.

(ii) Qualquer norma $\|\cdot\|$ em X é equivalente à norma $\|\cdot\|_2$ definida em (i).

(iii) Duas quaisquer normas em X são equivalentes.

(iv) X é um espaço de Banach em qualquer norma.

Demonstração. (i) Seja (x_n) uma sucessão de Cauchy em X para a norma $\|\cdot\|_2$. Para cada n, seja

$$x_n = \alpha_{n1}e_1 + \ldots + \alpha_{nr}e_r \quad \text{com} \quad \alpha_{ni} \in \mathbb{K}, i = 1, \ldots, r.$$

Temos assim

$$\|x_m - x_n\|_2 = (\sum_{i=1}^{r} |\alpha_{mi} - \alpha_{ni}|^2)^{\frac{1}{2}},$$

pelo que, para cada $i = 1, \ldots, r$ fixo

$$|\alpha_{mi} - \alpha_{ni}| \leq \|x_m - x_n\|_2,$$

logo $(\alpha_{ni})_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy em $\mathbb{K}$. Dado que $\mathbb{K}$ é completo, existe $\alpha_i \in \mathbb{K}$ tal que $\alpha_{ni} \to \alpha_i$ quando $n \to \infty$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\mathbb{N}_i$ tal que

$$|\alpha_{ni} - \alpha_i| \leq \sqrt{\frac{\epsilon}{r}} \quad \text{sempre que} \quad n \geq \mathbb{N}_i.$$

Seja $x := \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_r e_r$. Então temos

$$\|x_n - x\|_2 = (\sum_{i=1}^{r} |\alpha_{ni} - \alpha_i|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon \quad \text{para} \quad n \geq \max\{N_1, \ldots, N_r\}.$$

Assim $x_n \to x$ e $(X, \|\cdot\|_2)$ é um espaço de Banach.

(ii) Seja $\boldsymbol{k}_2 := (\sum_{i=1}^{r} \|e_i\|^2)^{\frac{1}{2}}$. Para cada $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_r e_r$ temos

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^{r} \|\alpha_i e_i\| = \sum_{i=1}^{r} |\alpha_i| \|e_i\| \leq (\sum_{i=1}^{r} |\alpha_i|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{r} \|e_i\|^2)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2 \boldsymbol{k}_2,$$

usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz[3]. Em seguida, seja $f : \mathbb{K}^r \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = \left\| \sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i \right\|.$$

A função f é contínua para a norma euclidiana em $\mathbb{K}^r$, pois

$$\begin{aligned} |f(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) - f(\beta_1, \ldots, \beta_r)| &\leq \left\| \sum_{i=1}^{r} (\alpha_i - \beta_i) e_i \right\| \leq \boldsymbol{k}_2 (\sum_{i=1}^{r} |\alpha_i - \beta_i|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \boldsymbol{k}_2 \|(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) - (\beta_1, \ldots, \beta_r)\|_2. \end{aligned}$$

A esfera

$$S = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{K}^r : \sum_{i=1}^{r} |\alpha_i|^2 = 1\},$$

[3] $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

é um conjunto fechado e limitado e, portanto, compacto. Deste, existe $(a_1, \ldots, a_r) \in S$ tal que

$$f(a_1, \ldots, a_r) \leq f(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \text{ para todo } (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in S.$$

Seja $\boldsymbol{k}_1 := f(a_1, \ldots, a_r)$. É claro que $\boldsymbol{k}_1 \geq 0$; mais, se $\boldsymbol{k}_1 = 0$ então teríamos $\sum a_i e_i = 0$ e $a_1 = \ldots = a_r = 0$ o que contradiz o facto de $(a_1, \ldots, a_r) \in S$, pelo que $\boldsymbol{k}_1 > 0$. Para cada vector $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_r e_r \in X$ não nulo, tem-se

$$\left(\frac{\alpha_1}{\|x\|_2}, \ldots, \frac{\alpha_r}{\|x\|_2}\right) \in S \quad \text{e} \quad \boldsymbol{k}_1 \leq f\left(\frac{\alpha_1}{\|x\|_2}, \ldots, \frac{\alpha_r}{\|x\|_2}\right) = \left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\|.$$

Portanto, $\boldsymbol{k}_1\|x\|_2 \leq \|x\|$ e $\boldsymbol{k}_1\|x\|_2 \leq \|x\| \leq \boldsymbol{k}_2\|x\|$, para todo o x.

(iii) A equivalência entre normas no conjunto de todas as normas sobre um espaço linear X (não necessariamente de dimensão finita) é uma relação de equivalência. Deste modo, como $\dim(X) < \infty$, podemos usar (ii) para concluir a afirmação.

(iv) Segue de (i) e (iii).

□

5 Álgebras de Banach

Definição 5.1. (i) Uma álgebra A sobre $\mathbb{K}$ é um espaço linear sobre $\mathbb{K}$, onde está definida uma operação de multiplicação (de $A \times A$ para A), tal que, para quaisquer $x, y, z \in A$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, verifica as seguintes propriedades:

(a) $(xy)z = x(yz)$;

(b) $x(y + z) = xy + xz, \quad (x + y)z = xz + yz$;

(c) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

(ii) A álgebra A diz-se comutativa (ou abeliana) se

$$xy = yx, \quad \text{para quaisquer} \quad x, y \in A.$$

(iii) Um elemento $\mathbf{1} \in A$ tal que, para qualquer $x \in A$,

$$x\mathbf{1} = \mathbf{1}x = x$$

diz-se identidade (ou unidade) de A.

Definição 5.2. Se A é uma álgebra e $\|\cdot\|$ é uma norma em A que satisfaz

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \quad \text{para todo } x, y \in A,$$

então $\|\cdot\|$ é a norma de uma álgebra e $(A, \|\cdot\|)$ designa-se por **álgebra normada**. Uma álgebra normada e completa designa-se por **álgebra de Banach**.

Se A tem identidade, então ela é única. Caso contrário, sendo $\mathbf{1}$ e $\mathbf{1}'$ unidades distintas, teríamos que $\mathbf{1} * \mathbf{1}' = \mathbf{1}$ porque $\mathbf{1}'$ é identidade de A mas $\mathbf{1} * \mathbf{1}' = \mathbf{1}'$ porque $\mathbf{1}$ é unidade e temos que $\mathbf{1} = \mathbf{1}'$.

Mais ainda, se $\mathbf{1}$ representa a unidade numa álgebra de Banach A, então, $\mathbf{1} = \mathbf{1}^2$ e tem-se que $\|\mathbf{1}\| \leq \|\mathbf{1}\|\|\mathbf{1}\|$ o que implica que $\|\mathbf{1}\| \geq 1$.

Definição 5.3. Se A é uma álgebra, um subespaço vectorial B diz-se uma **subálgebra** se $b, c \in B$ implica que $bc \in B$.

Exemplo 5.1. Seja $A = \mathbb{C}$ munida com a soma e multiplicação usuais dos números complexos em conjunto com o módulo. A é uma álgebra de Banach comutativa e unitária.

Exemplo 5.2. Seja X um espaço compacto de Hausdorff e considere-se a álgebra unitária $C(X)$ de todas as funções complexas e contínuas em X, com a multiplicação e adição definidas pontualmente, $fg(x) = f(x)g(x), (f+g)(x) = f(x) + g(x)$. Quando munida com a norma do supremo,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

$C(X)$ é uma álgebra de Banach comutativa e com unidade (a função constante e igual a 1).

Exemplo 5.3. Seja Ω um espaço localmente compacto de Hausdorff e seja $A = C_b(\Omega) := \{f \in C(\Omega) : f \text{ é limitada}\}$. Então A é uma álgebra de Banach comutativa e unitária.

Exemplo 5.4. Seja $A = C_0(\Omega) := \{f \in C(\Omega) : f \text{ anula-se no } \infty\}$[4]. A é uma álgebra de Banach comutativa e A é unitária se e só se Ω é compacto.

Exemplo 5.5. Seja $\mathcal{D}$ o disco unitário aberto em $\mathbb{C}$,

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \text{ e } \overline{\mathcal{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\},$$

e seja A o conjunto das funções contínuas e complexas em $\overline{\mathcal{D}}$, que são analíticas[5] em D. Considere-se A munida com a adição e a multiplicação pontuais e a norma

$$\|f\|_\infty = \sup \{|f(z)| : z \in S^1\},$$

onde S^1 é o círculo unitário. Deste modo, A é completo e é uma álgebra de Banach comutativa e unitária. A é conhecida como a álgebra do disco e representa-se por:

$$A(\mathcal{D}) := \{f \in C(\overline{\mathcal{D}}) : f \text{ é analítica em } \mathcal{D}\}.$$

Exemplo 5.6. Seja X um espaço de Banach complexo com $\dim(X) \geq 2$ e $L(X)$ o espaço de Banach dos operadores lineares limitados em X com respeito à norma do operador. Com a multiplicação de operadores dada pela composição, $L(X)$ é uma álgebra de Banach unitária não comutativa.

[4] $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ ou, de forma equivalente, $\{x : |f(x)| \geq \epsilon\}$ é compacto para todo o $\epsilon > 0$.

[5] Diz-se que uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é analítica num aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se para cada bola $\mathcal{B}(a, r) \subset \Omega$ existe uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ que converge para $f(z)$ para qualquer $z \in \mathcal{B}(a, r)$.

Exemplo 5.7. Seja A uma matriz em $M_n(\mathbb{C})$. A norma $\|A\|_{\max} = \max_{1\leq i,j\leq n}|a_{ij}|$ define uma norma em $M_n(\mathbb{C})$ mas $(M_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|_{max})$ não é uma álgebra normada. De facto, tome-se o seguinte exemplo: Sejam A, B matrizes tais que

$$A = B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \|A\|_{max} = 2$$

$$\text{Mas } A \cdot B = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} \text{ e } \|A \cdot B\|_{\max} = 8$$

observamos que $8 \neq 2 \times 2 = 4$.

Nos próximos exemplos vamos considerar a norma p para as matrizes $m \times n$, $A = [a_{ij}]$:

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Exemplo 5.8. Seja $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ matrizes $n \times n$ em $\mathbb{C}$. Como

$$\begin{aligned}
\|A \cdot B\|_1 &= \sum_{i,j=1}^{n} |(AB)_{ij}| = \sum_{i,j=1}^{n} |\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}| \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}| \\
&\leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \left(\sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}| \right) \\
&= \|A\|_1 \|B\|_1,
\end{aligned}$$

a álgebra das matrizes $n \times n$ em $\mathbb{C}$ é uma álgebra de Banach para a norma $\|\cdot\|_1$.

Exemplo 5.9. Considere-se o conjunto das matrizes $n \times n$, $(n \geq 2)$, em $\mathbb{C}$ com a adição e multiplicação matricial usuais e a norma de Frobenius definida por

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Obtemos uma álgebra de Banach não comutativa. De facto, dadas duas matrizes A e B, $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ e $b^j = (\overline{b_{1j}}, \overline{b_{2j}}, \ldots, \overline{b_{nj}})$ e o produto matricial usual, temos:

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \langle a_i, \overline{b^j} \rangle,$$

$$(A \cdot B)_{ij} = \begin{bmatrix} \langle a_1, \overline{b^1} \rangle & \langle a_1, \overline{b^2} \rangle & \ldots & \langle a_i, \overline{b^n} \rangle \\ \langle a_2, \overline{b^1} \rangle & \ldots & \ldots & \ldots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \langle a_n, \overline{b^1} \rangle & \ldots & \ldots & \langle a_n, \overline{b^n} \rangle \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\|A\cdot B\|_F^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} |\langle a_i, \overline{b^j}\rangle|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} \|a_i\|^2 \|\overline{b^j}\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\|a_i\|^2\cdot\|\overline{b^j}\|^2\right) = (\sum_{i=1}^{n}\|a_i\|^2)\cdot(\sum_{j=1}^{n}\|\overline{b^j}\|^2) \\
&= (\sum_{i,m=1}^{n})|a_{im}|^2)(\sum_{j,m=1}^{n}|\overline{b^{jm}}|^2), \quad \|a_i\|^2 = \sum_m |a_{im}|^2 \text{para } i \text{ fixo.} \\
&= \|A\|_F^2\|B\|_F^2.
\end{aligned}$$

No segundo passo utilizou-se a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Lema 5.4. *Seja A uma álgebra de Banach com identidade $\mathbf{1}$. Então, existe uma norma $|||\cdot|||$ em A, equivalente à norma original, tal que $(A, |||\cdot|||)$ é uma álgebra de Banach unitária com $|||\mathbf{1}||| = 1$.*

Demonstração. Para cada $x \in A$, seja T_x o operador linear $T_x : y \mapsto xy \in A, y \in A$. Então, se $T_x = T_{x'}$, segue-se que $T_x(\mathbf{1}) = T_{x'}(\mathbf{1})$ e, por isso, $x = x'$. Desta forma, $x \mapsto T_x$ é uma aplicação injectiva de A no conjunto dos operadores lineares em A. Agora,

$$\|T_x(y)\| = \|xy\| \leq \|x\|\|y\|, \quad \text{para } y \in A$$

Isto implica que T_x é limitada e $\|T_x\| \leq \|x\|$. Tome-se $|||x||| = \|T_x\|$. Mostrámos que $|||x||| \leq \|x\|$, para qualquer $x \in A$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
|||x||| = \|T_x\| &= \sup\ \{\|T_x(y)\| : \|y\| \leq 1\} \\
&= \sup\ \{\|xy\| : \|y\| \leq 1\} \\
&\geq \|xy'\| \quad \text{onde } y' = \frac{\mathbf{1}}{\|\mathbf{1}\|} \\
&= \frac{\|x\|}{\|\mathbf{1}\|}.
\end{aligned}$$

Deste modo, $\|x\|/\|\mathbf{1}\| \leq |||x||| \leq \|x\|$, para todo o $x \in A$, o que mostra que as duas normas $|||\cdot|||$ e $\|\cdot\|$ são equivalentes. Mais ainda, para todo o $x, y \in A$,

$$\begin{aligned}
|||xy||| &= \|T_{xy}\| \\
&= \|T_xT_y\| \\
&\leq \|T_x\|\|T_y\| \\
&= |||x|||\,|||y|||.
\end{aligned}$$

Assim, A com a norma $|||\cdot|||$ é uma álgebra de Banach. Resta ainda ver que $|||\mathbf{1}||| = \|T_\mathbf{1}\| = 1$. É fácil verificar que $1 \leq |||\mathbf{1}|||$. No sentido oposto, argumentando por contradição, se $|||\mathbf{1}||| > 1$ teríamos que:

$$\begin{aligned}
|||\mathbf{1}||| = \|T_\mathbf{1}\| > 1 &\iff \sup\{\|T_\mathbf{1}(y)\| : \|y\| \leq 1\} > 1 \\
&\iff \sup\{\|\mathbf{1}y\| : \|y\| \leq 1\} > 1,
\end{aligned}$$

o que não pode acontecer. $\square$

Lema 5.5. *Uma álgebra de Banach A sem unidade pode ser mergulhada numa álgebra de Banach unitária A_I como um ideal de codimensão um.*

Demonstração. Seja $A_I = A \oplus \mathbb{C}$ um espaço linear e defina-se a multiplicação em A_I por

$$(x, \lambda)(y, \mu) = (xy + \mu x + \lambda y, \lambda\mu)$$

que é associativa e distributiva. Mais ainda, $(0, 1)$ é a identidade para esta multiplicação:

$$(x, \lambda)(0, 1) = (x0 + x + \lambda 0, \lambda 1) = (x, \lambda) = (0, 1)(x, \lambda).$$

Seja $\|(x, \lambda)\| = \|x\| + |\lambda|$. Então, A_I é um espaço de Banach quando munido com esta norma. Mais ainda,

$$\begin{aligned}
\|(x, \lambda)(y, \mu)\| &= \|(xy + \mu x + \lambda y, \lambda\mu)\| \\
&= \|xy + \mu x + \lambda y\| + |\lambda\mu| \\
&\leq \|x\|\|y\| + |\mu|\|x\| + |\lambda|\|y\| + |\lambda||\mu| \\
&= \|y\|(\|x\| + |\lambda|) + |\mu|(\|x\| + |\lambda|) \\
&= (\|x\| + \lambda)(\|y\| + |\mu|) = \|(x, \lambda)\|\|(y, \mu)\|.
\end{aligned}$$

Então, A_I é uma álgebra de Banach com unidade. Podemos identificar A com o ideal $\{(x, 0) : x \in A\}$ em A_I pelo isomorfismo isométrico $x \mapsto (x, 0)$. $\square$

Exemplo 5.10. Seja A o espaço de Banach $l^1(\mathbb{Z})$ e defina-se xy por $(xy)_n = \sum_m x_m y_{n-m}$ para $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ em A. Então,

$$\begin{aligned}
\sum_n |(xy)_n| &\leq \sum_n \sum_m |x_m||y_{n-m}| \\
&= \sum_m |x_m| \sum_n |y_{n-m}| \\
&= \sum_m |x_m| \|y\| \\
&= \|x\|\|y\|.
\end{aligned}$$

Deste modo, $xy \in l^1(\mathbb{Z})$ e A é uma álgebra de Banach. Mais ainda, A tem unidade dada por $(x_n) = (\delta_{0n}) = (..., 0, 0, 1, 0, 0, ...)$ onde 1 aparece na 0-ésima posição.

Definição 5.6. Um elemento x numa álgebra de Banach A diz-se **invertível** em A se existe algum $z \in A$ tal que $xz = zx = \mathbf{1}$. Mais ainda, se tal z existe ele é único. z designa-se por **inverso** de x e representa-se por x^{-1}. O conjunto dos elementos invertíveis forma um grupo. Os elementos não invertíveis designam-se **singulares**.

Seja $g(A) := \{a \in A : a \text{ invertível em } A\}$. Então $1 \in g(A)$ e $0 \notin g(A)$. O conjunto $g(A)$ é um grupo multiplicativo.

Proposição 5.7. *Se x é um elemento de uma álgebra de Banach unitária A tal que $\|x\| < 1$, então $\mathbf{1} - x$ é invertível e a sua inversa é dada pela série de*

Newmann, que é absolutamente convergente, $(\mathbf{1}-x)^{-1} = \mathbf{1}+x+x^2+\ldots$*. Mais ainda, temos as seguintes desigualdades:*

$$\|(\mathbf{1}-x)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|x\|}, \tag{2}$$

$$\|\mathbf{1}-(\mathbf{1}-x)^{-1}\| \leq \frac{\|x\|}{1-\|x\|}. \tag{3}$$

Demonstração. Como $\|x^n\| \leq \|x\|^n$ para todo o $n = 1, 2, \ldots$, podemos definir um elemento $z \in A$ como a soma da série absolutamente convergente

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Temos que

$$z(\mathbf{1}-x) = (\mathbf{1}-x)z = \lim_{N\to\infty}(\mathbf{1}-x)\sum_{k=0}^{N} x^k = \lim_{N\to\infty}(\mathbf{1}-x^{N+1}) = \mathbf{1};$$

Desta forma, $\mathbf{1}-x$ é invertível e a sua inversa é z. A desigualdade (2) segue de

$$\|z\| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\|x^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\|x\|^n = \frac{1}{1-\|x\|}.$$

Uma vez que

$$\mathbf{1}-z = -\sum_{n=1}^{\infty} x^n = -xz,$$

temos que $\|\mathbf{1}-z\| \leq \|x\|\cdot\|z\|$, pelo que (3) segue de (2). □

Teorema 5.8. *Seja A uma álgebra de Banach unitária. $g(A)$ é um conjunto aberto em A e $x \mapsto x^{-1}$ é uma aplicação contínua de $g(A)$ para $g(A)$.*

Demonstração. Seja $a \in g(A)$ e $D = \{b \in A : \|a-b\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}\}$. Notamos que $\mathbf{1}-a^{-1}b = a^{-1}(a-b)$. Então, $\|\mathbf{1}-a^{-1}b\| \leq \|a^{-1}\|\|a-b\| < 1$. Pela proposição 5.7 $a^{-1}b \in g(A)$. Resta observar que $b = a(a^{-1}b) \in g(A)$ o que mostra que $D \subset g(A)$.

Provemos agora a continuidade da aplicação $a \mapsto a^{-1}$. Seja $(a_n) \subseteq g(A)$ tal que $a_n \to a \in g(A)$. O objectivo é mostrar que $a_n^{-1} \to a^{-1}$. Vemos que

$$\|a_n^{-1} - a^{-1}\| = \|a^{-1}(a_n - a)a_n^{-1})\| \leq \|a^{-1}\|\|a_n - a\|\|a_n^{-1}\|. \tag{4}$$

Se mostrarmos que $\|a_n^{-1}\|$ é limitada por uma constante fixa a prova fica concluída.

Como $a_n \to a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|a_n - a\| < \frac{1}{2\|a^{-1}\|}$ para todo o $n \geq n_0$. Então, $\|a^{-1}a_n - 1\| < \frac{1}{2}$ para $n \geq n_0$. Para $n \geq 0$ temos que,

$$\|aa_n^{-1}\| = \|(a^{-1}a_n)^{-1}\| = \sum_{k=0}^{\infty}\|(a^{-1}a_n - 1)^k\| < \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} < 2.$$

Assim, $\|a_n^{-1}\| \leq \|a_n^{-1}a\|\|a^{-1}\| < 2\|a^{-1}\|$, para todo o $n \geq n_0$. Escolha-se $M = \max\{\|a_i^{-1}\|, 2\|a^{-1}\| : i = 1, 2, \ldots, n_0\}$.

Pela equação (4), segue-se que $a_n^{-1} \to a^{-1}$. □

5.1 O espectro de um elemento numa álgebra de Banach

Definição 5.9. Seja A uma álgebra com identidade e seja $x \in A$. O **espectro de x** é o subconjunto $\sigma_A(x)$ em $\mathbb{C}$ dado por

$$\sigma_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda \mathbf{1} \notin g(A)\}.$$

O **conjunto resolvente** $\rho_A(x)$ de x é o complementar do espectro de x

$$\rho_A(x) = \mathbb{C} \backslash \sigma_A(x).$$

O **raio espectral** $r_A(x)$ de um elemento $x \in A$ é

$$r_A(x) = \sup \{|\lambda| : \lambda \in \sigma_A(x)\},$$

sempre que $\sigma_A(x)$ é não vazio.

Exemplo 5.11. Seja A a álgebra de Banach unitária das matrizes complexas $n \times n$, $M_n(\mathbb{C})$. Dado $a \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, $a - \lambda \mathbf{1}$ é invertível em A se e só se λ não é um valor próprio de a. Por outras palavras, $\sigma_A(a)$ é o conjunto dos valores próprios da matriz a.

Exemplo 5.12. Vamos assumir que A é a álgebra de Banach comutativa e unitária, $C([0,1])$ e $f \in A$. Então, para $\lambda \in \mathbb{C}$, $f - \lambda \mathbf{1}$ é invertível em A desde que f não tome o valor λ. Esta afirmação resulta de observar que se z é a inversa de $f - \lambda \mathbf{1}$

$$(f - \lambda \mathbf{1})z = \mathbf{1} \iff z = \frac{\mathbf{1}}{f - \lambda \mathbf{1}},$$

e $f - \lambda \mathbf{1} \neq 0 \Leftrightarrow f \neq \lambda \mathbf{1}$. Assim, $\sigma_A(f)$ é igual ao conjunto dos valores que f assume, i.e., $\sigma_A(f) = \text{ran } f$, o contradomínio de f.

Teorema 5.10. *Para todo o x numa álgebra de Banach unitária A, em $\mathbb{C}$, o espectro $\sigma_A(x)$ é um subconjunto não vazio e compacto com*

$$\sigma_A(x) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|x\|\}.$$

Antes de procedermos à prova deste resultado, reafirmamos que ele só é válido em $\mathbb{C}$. De facto, um operador que actue num espaço vectorial real não tem que ter qualquer valor próprio: basta considerar uma rotação de 90 graus em torno da origem.

Demonstração. Dado $x \in A$, $x - \lambda \mathbf{1}$ é invertível sempre que $|\lambda| > \|x\|$. De facto, para qualquer um desses λ,

$$(x - \lambda \mathbf{1}) = (-\lambda)(\mathbf{1} - x\lambda^{-1}),$$

tem inversa dada por uma série converge com potências de $x\lambda^{-1}$. Deste modo, $\sigma_A(x) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|x\|\}$.Em particular, o resultado mostra que $\sigma_A(x)$ é limitado.

Seja f a aplicação $f : \lambda \mapsto x - \lambda \mathbf{1}$. Então, $\lambda \notin \sigma_A(x)$ se e só se $x - \lambda \mathbf{1} \in g(A)$, i.e., se e só se $\lambda \in f^{-1}(g(A))$. Segue-se que $\mathbb{C} \backslash \sigma_A(x) = f^{-1}(g(A))$. É claro que $f : \mathbb{C} \to A$ é contínua. Além disso, como $g(A)$ é um conjunto aberto temos que $f^{-1}(g(A)) = \mathbb{C} \backslash \sigma_A(x)$ é aberto e, portanto, $\sigma_A(x)$ é fechado. Como $\sigma_A(x)$ é um subconjunto limitado e fechado de $\mathbb{C}$ é compacto.

Falta provar que $\sigma_A(x)$ é não vazio. Vamos supor, por contradição, que $\sigma_A(x) = \emptyset$. Então, $(x - \lambda\mathbf{1})$ é invertível para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Afirmamos que a aplicação $\lambda \mapsto (x - \lambda\mathbf{1})^{-1}$ é diferenciável, com derivada $(x - \lambda\mathbf{1})^{-2}$, isto é,

$$\frac{(x - (\lambda + \zeta)\mathbf{1})^{-1} - (x - \lambda\mathbf{1})^{-1}}{\zeta} \to (x - \lambda\mathbf{1})^{-2}$$

em A à medida que $\zeta \to 0$ em $\mathbb{C}$ (com $\zeta \neq 0$).

Notemos que

$$\begin{aligned}(x - \alpha\mathbf{1})^{-1} - (x - \beta\mathbf{1})^{-1} &= (x - \alpha\mathbf{1})^{-1}\{(x - \beta\mathbf{1}) - (x - \alpha\mathbf{1})\}(x - \beta\mathbf{1})^{-1} \\ &= (x - \alpha\mathbf{1})^{-1}(\alpha - \beta)(x - \beta\mathbf{1})^{-1}.\end{aligned}$$

Deste modo,

$$\frac{(x - (\lambda + \zeta)\mathbf{1})^{-1} - (x - \lambda\mathbf{1})^{-1}}{\zeta} = \frac{(x - (\lambda + \zeta)\mathbf{1})^{-1}\cancel{\zeta}(x - \lambda\mathbf{1})^{-1}}{\cancel{\zeta}} \to (x - \lambda\mathbf{1})^{-2}$$

em A quando $\zeta \to 0$, já que $x - (\lambda + \zeta) \to x - \lambda$. Isto prova a afirmação.

Agora, seja $\varphi \in A^*$, o espaço dual de A[6]. A aplicação $\lambda \mapsto \varphi((x - \lambda\mathbf{1})^{-1})$ é diferenciável em toda a parte em $\mathbb{C}$, isto é, $g(\lambda) \equiv \varphi((x - \lambda\mathbf{1})^{-1})$ é uma função inteira. Para todo o $|\lambda|$ suficientemente grande, podemos dizer que

$$\begin{aligned}(x - \lambda\mathbf{1})^{-1} &= (\lambda)^{-1}(\mathbf{1} - \lambda^{-1}x)^{-1} \\ &= (-\lambda)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda^{-1}x)^n \quad (|\lambda| > \|x\|),\end{aligned}$$

o lado direito converge para 0 quando $|\lambda| \to \infty$ e, por isso, o mesmo é verdade para o lado esquerdo da equação, pelo que $g(\lambda) \to 0$ à medida que $|\lambda| \to \infty$. Pelo teorema de Liouville [7], deduz-se que g é identicamente zero em $\mathbb{C}$. Então, temos que $\varphi((x - \lambda\mathbf{1})^{-1}) = 0$ para todo o $\varphi \in A^*$, o que implica que $(x - \lambda\mathbf{1})^{-1} = 0$. Isto é impossível pois $(x - \lambda\mathbf{1})^{-1}(x - \lambda\mathbf{1}) = \mathbf{1} \neq 0$. Conclui-se que $\sigma_A(x) \neq \emptyset$. $\square$

Teorema 5.11. *Seja A uma álgebra de Banach unitária e seja $x \in A$. Então, o limite $\lim_{x\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ existe e verifica*[8]

$$\lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}} = r_A(x) = \inf_n\|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Exemplo 5.13. Vamos considerar a álgebra de Banach $C(X)$ para algum espaço de Hausdorff compacto X. Vimos já que $\sigma_A(f) = \text{ran } f = f(X)$ e

$$\begin{aligned}r_A(f) &= \sup\{|\lambda| \colon \lambda \in \sigma_A(f)\} = \sup\{|\lambda| \colon \lambda \in \text{ran } f\} \\ &= \sup\{|\lambda| \colon \lambda \in f(x), \forall x\} = \sup\{|f(x)| \colon \forall x\} \\ &= \|f\|_\infty,\end{aligned}$$

assim $r_A(f) = \|f\|_\infty$. O fórmula do raio espectral aplica-se neste caso uma vez que

$$\|f^n\|_\infty = (\|f\|_\infty)^n \text{ e } \|f^n\|_\infty^{1/n} = \|f\|_\infty \quad \forall n$$

[6] Consultar pág. 10.

[7] Se f é uma função inteira (holomorfa em $\mathbb{C}$) e limitada, então f é uma função constante.

[8] A prova do teorema encontra-se em [3], pág.116.

Exemplo 5.14. Seja $A(\mathcal{D})$ a álgebra do disco. Cada f em $A(\mathcal{D})$ é unicamente determinada pelos valores que assume no círculo unitário $S^1 = \partial\mathcal{D}$. Então, $A(\mathcal{D})$ pode ser considerada uma subálgebra de $C(S^1)$, a álgebra de Banach das funções contínuas e complexas no círculo unitário S^1. Esta identificação de A em $C(S^1)$ preserva a norma pelo princípio do módulo máximo[9].

Seja $t(z) = z$, para $z \in \overline{\mathcal{D}}$. Então, $t \in A$. $(z - \lambda\mathbf{1})$ não é uma função invertível e analítica em $\mathcal{D}$ se e só se $\lambda \in \mathcal{D}$. Desta maneira, vemos que

$$\sigma_A(t) = \mathcal{D} = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}.$$

Por outro lado, ao ser considerada um elemento de $C(S^1)$, t é a função $t(\theta) = \mathrm{e}^{i\theta}$. Então, $(t - \lambda\mathbf{1})$ não é invertível em $C(S^1)$ se e só se $|\lambda| = 1$. Portanto,

$$\sigma_{C(S^1)}(t) = \partial\mathcal{D} = \{\lambda : |\lambda| = 1\}.$$

Temos que $r_A(t) = r_{C(S^1)}(t) = 1$.

O próximo deveu-se ao trabalho independente de Israel Gelfand (1941) e de Stanislaw Mazur (1938).

Teorema 5.12 (Gelfand-Mazur)**.** *Seja A uma álgebra de Banach unitária em que todo o elemento não nulo é invertível. Então $A \simeq \mathbb{C}$.*

Demonstração. Para todo o $x \in A$, $\sigma_A(x) \neq \emptyset$ e, por isso, existe um $\lambda \in \mathbb{C}$ com $x - \lambda\mathbf{1} \notin g(A)$. Isto implica que $x - \lambda\mathbf{1} = 0$, ou seja, $x = \lambda\mathbf{1}$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$. □

Proposição 5.13. *Seja Y um espaço normado. Y é completo se e só se tem a seguinte propriedade: se (y_m) é uma qualquer sucessão em Y tal que $\sum_{m=1}^{\infty}\|y_m\| < \infty$, então existe um $y \in Y$ tal que $\sum_{m=1}^{n} y_m \to y$ quando $n \to \infty$.*

Demonstração. Se Y é completo e (y_n) satisfaz $\sum_{k=1}^{\infty}\|y_k\| < \infty$ então é claro que $(\sum_{k=1}^{n} y_k)$ é uma sucessão de Cauchy e, como tal, converge.

Para verificar o outro lado da implicação, assumimos que Y é um espaço normado e (x_n) é uma sucessão de Cauchy em Y. Construímos uma subsucessão da seguinte forma: Seja $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_{n_1} - x_m\| < \frac{1}{2}$ para todo o $m > n_1$. Seja agora $n_2 > n_1$ tal que $\|x_{n_2} - x_m\| < \frac{1}{4}$ para todo o $m > n_2$. Continuando desta maneira, obtém-se uma sucessão (x_{n_k}) de (x_n) tal que

$$\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| < \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Defina-se $y_k = x_{n_k} - x_{n_{k+1}}$ para $k = 1, 2, \ldots$ Então,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty}\|y_k\| &= \sum_{k=1}^{\infty}\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| \\ &< \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} < \infty. \end{aligned}$$

[9] Seja f uma função holomorfa num subconjunto aberto e conexo D do plano complexo, $\mathbb{C}$, que assume valores complexos. Se x_0 é um ponto em D tal que $|f(x_0)| \geq |f(x)|$, para todo o x numa vizinhança de x_0, então a função f é constante em D.

Por hipótese, existe um $y \in Y$ tal que

$$\begin{aligned} y &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} y_k \\ &= \lim_{m\to\infty} (x_{n_1} - x_{n_2}) + (x_{n_2} - x_{n_3}) + \cdots + (x_{n_m} - x_{n_{m+1}}) \\ &= \lim_{m\to\infty} (x_{n_1} - x_{n_{m+1}}). \end{aligned}$$

Ou seja, (x_{n_k}) converge em Y para $x_{n_1} - y$. Se uma subsucessão de uma sucessão de Cauchy converge, toda a sucessão converge, i.e., (x_n) converge em Y e concluímos que Y é completo.

□

5.2 Ideais e espaço quociente

Definição 5.14. Um ideal em A é um subespaço linear $I \subseteq A$ que é invariante pela multiplicação à esquerda e à direita, ou seja, $AI + IA \subseteq I$.

Existem dois ideais triviais, nomeadamente $I = \{0\}$ e $I = A$, e A diz-se **simples** se estes são os únicos ideais. Um ideal diz-se **próprio** se não é todo o A.

Um ideal M numa álgebra de Banach complexa A diz-se um ideal **maximal** se é um elemento maximal no conjunto de ordem parcial de todos os ideais próprios de A. Desta forma, um ideal maximal é um ideal próprio $M \subseteq A$ com a propriedade de que para qualquer ideal $N \subseteq A$,

$$M \subseteq N \Rightarrow N = M \text{ ou } N = A.$$

Exemplo 5.15. Seja $A = C([0,1])$ e $J = \{f \in C([0,1]) : f(t) = 0, t \in [0, 1/2]\}$. J é um ideal próprio de A.

Proposição 5.15. *Seja A uma álgebra de Banach com unidade. Então,*

1. *O fecho de um ideal próprio é um ideal próprio.*
2. *Todo o ideal próprio está contido num ideal maximal.*
3. *Todo o ideal maximal é fechado.*
4. *Se A for comutativa, $x \in A$ é invertível se e só se não existe J, ideal maximal de A, tal que $x \in J$.*

Demonstração. Vamos a título de exemplo mostrar 3. Seja J um ideal maximal numa álgebra de Banach A. Então, J não pode conter nenhum elemento invertível, caso contrário teríamos $J = A$. Desta forma, $J \subseteq A \setminus g(A)$. Agora, recordamos que $g(A)$ é aberto e, por isso, $A \setminus g(A)$ é fechado. Então,

$$J \subseteq \overline{J} \subseteq A \setminus g(A)$$

Em particular, $\overline{J} \neq A$. Mas $\overline{J}$ é um ideal que contém J e, por isso, $\overline{J} = J$ já que J é um ideal maximal. Isto é, J é fechado. □

Vamos agora falar sobre o espaço quociente num espaços de Banach. Vamos supor que X é um espaço de Banach e M é um subespaço fechado de X. Definimos uma relação de equivalência em X, $x \cong y$ se e só se $x - y$ está em M; Representamos as classes de equivalência por X/M; isto é, X/M é o conjunto dos subconjuntos $x + M$ onde $x_1 + M = x_2 + M$ se e só se $x_1 - x_2$ está em M.

Definimos a adição e multiplicação por escalares em X/M por

$$(x_1 + M) + (x_2 + M) = x_1 + x_2 + M \quad \text{e} \quad \alpha(x + M) = \alpha x + M.$$

A norma em X/M será dada por

$$\|x + M\| = \inf\{\|x + m\| : m \in M\} = \inf\{\|x - m\| : m \in M\},$$

Pelo que $\|x + M\|$ pode ser vista como a distância de x para M. Note-se que $\|x + M\| = 0$ se e só se x está em M. A aplicação $\Pi : X \to X/M$ que envia x em $x + M$ designa-se por aplicação quociente. É linear e, uma vez que

$$\|\Pi(x)\| = \|x + M\| \leq \|x\|,$$

é limitada.

Para aplicar este conceito, vamos considerar um operador linear limitado $T : X \to Y$ onde X e Y são espaços de Banach e seja $M = \ker T$, um subespaço fechado em X. Seja $X/M = X/\ker T$ um quociente. Se T é sobrejectiva, vamos afirmar que Y e $X/\ker T$ são isomorfos; isto é, existe um operador linear, limitado e bijectivo de um para o outro com inversa limitada. Seja

$$A : X/\ker T \to Y$$

e escreva-se

$$A(x + \ker T) = Tx.$$

A está bem definida, é linear e limitada; Mais ainda, se $A(x_1 + \ker T) = A(x_2 + \ker T)$, então $Tx_1 = Tx_2$ e $x_1 - x_2$ está no ker T. Isto mostra que A é injectiva. Para ver que é sobrejectiva, seja $y \in Y$ e descubra-se um x com $Tx = y$, tal que $A(x + \ker T) = y$. Como A é injectiva e linear sabemos que A tem uma inversa limitada e, desta forma, $X/\ker T$ é isomorfo a Y.

Seja agora A uma álgebra de Banach e J um ideal próprio e fechado de A. Dado o espaço quociente, podemos definir uma multiplicação em A/J pondo, para quaisquer $[x] = \{x + m : m \in M\}$, $[y] = \{y + m :\in M\}$, em A/J,

$$[x][y] = [xy].$$

Considerando a norma quociente em A/J,

$$\|[x]\|_{A/J} = \inf_{u \in [x]} \|u\|,$$

concluímos que A/J é um espaço de Banach, uma vez que J é fechado.

Podemos desta forma achar natural o seguinte teorema:

Teorema 5.16. *Seja A uma álgebra de Banach (com unidade) e J um seu ideal próprio fechado. Então, A/J é uma álgebra de Banach com unidade.*

Demonstração. Para verificar que A/J é uma álgebra de Banach resta-nos apenas ver que A/J é uma álgebra normada. De facto,

$$\begin{aligned}\|[x][y]\|_{A/J} = \|[xy]\|_{A/J} &= \inf_{z\in[xy]}\|z\| = \inf_{u\in[x],v\in[y]}\|uv\| \\ &\leq \inf_{u\in[x],v\in[y]}\|u\|\|v\| \leq \inf_{u\in[x]}\|u\| \inf_{v\in[y]}\|v\| \\ &= \|[x]\|_{A/J}\|[y]\|_{A/J},\end{aligned}$$

e obtemos a afirmação. Se A tem unidade $\mathbf{1}$ então $[\mathbf{1}]$ é a unidade de A/J. □

6 Teoria de Gelfand

6.1 Homomorfismos e caracteres

Definição 6.1. Dadas duas álgebras A e B define-se como **homomorfismo** a função $\omega : A \to B$ se ω for linear e multiplicativo, ou seja,

$$\omega(ab) = \omega(a)\omega(b) \text{ para todo o } a, b \in A.$$

Se o homomorfismo ω é uma bijecção, então diz-se um *isomorfismo*. Se A e B são álgebras normadas, um homomorfismo diz-se *isométrico* se $\|\omega(a)\| = \|a\|$ para todo o $a \in A$.

Proposição 6.2. *Todo o homomorfismo numa álgebra de Banach A, em $\mathbb{C}$, é contínuo.*

Demonstração. Seja A uma álgebra de Banach e $\omega : A \to \mathbb{C}$ um homomorfismo. Se $\omega = 0$, o homomorfismo é imediatamente contínuo. Vamos supor que $\omega \neq 0$ e que A é unitária. Para qualquer $a \in A$,

$$\omega(a) = \omega(a\mathbf{1}) = \omega(a)\omega(\mathbf{1}) \Rightarrow 1 = \omega(\mathbf{1}).$$

Se $a \in A$ e $\omega(a) \neq 0$, temos que $b = a - \omega(a)\mathbf{1}$ pertence ao núcleo de ω e é não invertível (caso contrário teríamos que $1 = \omega(bb^{-1}) = \omega(b)\omega(b^{-1})$ o que é impossível). Isto significa que $\omega(a)$ pertence a $\sigma_A(a)$ e segue-se que $|\omega(a)| \leq \|a\|$[10]. Esta desigualdade mantém-se válida quando $\omega(a) = 0$ e concluímos que ω é contínua em A.

Se A é não unitária, consideramos A_I em vez de A. Define-se a aplicação $\omega' : A_I \to \mathbb{C}$ por $\omega'((a,\lambda)) = \omega(a) + \lambda$, $(a,\lambda) \in A_I$. ω' é um homomorfismo e é contínuo em A_I. Em particular, a sua restrição para A em A_I é contínua, i.e., ω é contínua. □

Definição 6.3. Os homomorfismos duma álgebra de Banach A, em $\mathbb{C}$, designam-se por funcionais multiplicativos. Um funcional multiplicativo não nulo designa-se por **carácter**.

Pela proposição anterior, os funcionais lineares multiplicativos são contínuos.

Dada uma álgebra A comutativa e unitária, o grupo dos seus elementos invertíveis $g(A)$ fica completamente determinado se conhecermos todos os ideais próprios da álgebra. De facto, temos o seguinte teorema:

[10]Conferir teorema 5.10.

Teorema 6.4. *Seja A uma álgebra comutativa e unitária. Então $x \in g(a)$ se e só se não pertence a nenhum ideal próprio.*

Demonstração. Começamos por provar que se $x \in g(A)$ então não pertence a nenhum ideal próprio. Vamos supor que J é um ideal próprio de A e $x \in J \cap g(A)$ então $x^{-1}x = \mathbf{1} \in J$, pelo que se teria $J = A$, contrariando a hipótese.

Por outro lado, seja $x \in A$ não invertível. O conjunto

$$Ax = \{ax : a \in A\}$$

é um ideal que contém x (quando $a = \mathbf{1}$). Além disso, é um ideal próprio, pois caso contrário ter-se-ia $\mathbf{1} \in Ax$, i.e., $\mathbf{1} = ax$ para algum $a \in A$ e, portanto $ax = xa = \mathbf{1}$ implicaria que $x \in g(A)$. Então, se $x \in A$ não pertence a nenhum ideal próprio, x é invertível, o que termina a demonstração. $\square$

6.2 O espectro de Gelfand

Definição 6.5. O conjunto dos caracteres de uma álgebra de Banach comutativa e unitária A designa-se por **espectro de Gelfand** de A e denota-se por $\mathrm{sp}(A)$.

$$\mathrm{sp}(A) = \{\omega \in \hom(A, \mathbb{C}) : \omega \neq 0\}$$

Proposição 6.6. *Seja A uma álgebra de Banach complexa e unitária e $\omega \in \mathrm{sp}(A)$. Então $\|\omega\| = 1$.*

Nos próximos resultados vamos assumir que $\|\mathbf{1}\| = 1$.

Demonstração. Como $\omega(\mathbf{1}) = 1$, temos que $1 = |\omega(\mathbf{1})| \leq \|\omega\|\|\mathbf{1}\| = \|\omega\|$. Vamos supor agora, por contradição, que $\|\omega\| > \mathbf{1}$. Então existe $a_0 \in A$ tal que $\|a_0\| = 1$ e $|\omega(a_0)| > 1$. Recordamos que $\|\omega\| = \sup\{|\omega(a_0)| : \|a_0\| = 1\}$. Seja

$$a = a_0 - \omega(a_0)1.$$

Então, $a \in \ker(\omega)$ uma vez que $\omega(a) = 0$. Temos que

$$\left\| \frac{a_0}{\omega(a_0)} \right\| = \left\| \frac{a + \omega(a_0)1}{\omega(a_0)} \right\| < 1.$$

Deste modo, $a/\omega(a_0) \in g(A)$[11]. Consequentemente, $a \in g(A)$ o que não é possível já que $a \in \ker(\omega)$. Então, $\|\omega\| = 1$. $\square$

Teorema 6.7. *Numa álgebra de Banach comutativa e unitária A, para todo o ω em* $\mathrm{sp}(A)$, o núcleo de ω é um ideal maximal de A e, reciprocamente, todo o ideal maximal em A é o núcleo de algum $\omega \in \mathrm{sp}(A)$.

Demonstração. Seja M é um ideal maximal em A, tal que M é fechado e A/M é uma álgebra de Banach unitária. Vamos mostrar que este quociente é isomorfo a $\mathbb{C}$ provando que todo o elemento não nulo é invertível e invocando o teorema de Gelfand-Mazur.

Seja $x \in A$, não pertencente a M; Queremos provar que $x + M$ é invertível na álgebra do quociente. Seja $J = \{ax + Y : a \in A, Y \in M\}$. J é um ideal próprio que contém M. Como M é maximal, temos forçosamente que $J = A$,

[11] Ver teorema 5.7.

pelo que existem elementos $a \in A$ e $Y \in M$ tais que $ax + Y = \mathbf{1}$. Isto significa que $x + M$ é invertível, com inversa $a + M$. Pelo teorema de Gelfand-Mazur sabemos que A/M é isometricamente isomorfo a $\mathbb{C}$, por um isomorfismo i. A aplicação quociente $\Pi : A \to A/M$ é um homomorfismo, pelo que a composição $i \circ \Pi$ é um homomorfismo complexo de A. O seu núcleo é o próprio M, uma vez que

$$(i \circ \Pi)(x) = 0 \iff i(x + M) = 0 \iff x + M = 0 \iff x \in M.$$

Para provar a direcção contrária, seja ω um funcional linear de A. Sabemos que o seu núcleo é um ideal fechado em A. Para provar que este ideal é maximal podemos invocar novamente o teorema de Gelfand-Mazur e observar que a dimensão de $A/\ker(\omega)$ é 1, a dimensão de $\mathbb{C}$. □

Proposição 6.8. *Qualquer álgebra de Banach comutativa e unitária tem pelo menos um carácter.*

Demonstração. Se todos os elementos de uma álgebra de Banach comutativa e unitária A são invertíveis então $A \simeq \mathbb{C}$ e o respectivo isomorfismo é um carácter. Por outro lado, se existe um $x \in A$ tal que x não é invertível, então xA é um ideal próprio e, por isso, está contido num ideal próprio maximal J, pelo lema de Zorn[12]. Mas então sabemos que J é o núcleo de um carácter em A. □

Sem a condição de comutatividade facilmente se verifica que podem existir álgebras sem caracteres.

Exemplo 6.1. Seja $A = M_n(\mathbb{C})$, com $n > 1$, e seja e_{ij} a matriz $n \times n$ cujas entradas são 0 excepto para a ij-ésima entrada que é 1. Se ω for um carácter de A então, para $i \neq j$ a igualdade $e_{ij}^2 = 0$ implicaria que $\omega(e_{ij}) = 0$. Então, a igualdade $e_{ii} = e_{ij}e_{ji}$ com $i \neq j$ implicaria que $\omega(e_{ii}) = 0$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Concluir-se-ia que $\omega(\mathbf{1}) = \omega(e_{11}) + \ldots + \omega(e_{nn}) = 0$, o que é impossível. Deste modo, $M_n(\mathbb{C})$, para qualquer $n > 1$, não tem nenhum carácter.

$$e_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema 6.9. *Seja A uma álgebra de Banach comutativa e unitária e seja $x \in A$. Temos que*

$$\sigma_A(x) = \{\omega(x) : \omega \in \mathrm{sp}(A)\}.$$

Demonstração. Fixemos $x \in A$ e suponhamos que $\lambda \in \sigma_A(x)$. Então, $x - \lambda\mathbf{1}$ não é invertível e

$$\{(x - \lambda\mathbf{1})y : y \in A\}$$

é um ideal próprio (que não pode conter $\mathbf{1}$) e, por isso, está contido num ideal maximal que é o núcleo de algum funcional linear multiplicativo ω[13]. Como $\omega(x - \lambda\mathbf{1}) = 0$, temos que $\omega(x) = \lambda$. □

[12]Seja X um conjunto não vazio parcialmente ordenado em que toda a cadeia possui um majorante. Então X contém um elemento maximal.

[13]Conferir teorema 6.7.

Corolário 6.10. *Um elemento x numa álgebra de Banach comutativa e unitária A é invertível se e só se $\omega(x) \neq 0$ para todo o $\omega \in \mathrm{sp}(A)$.*

Demonstração. A afirmação é uma consequência do teorema 6.9. □

O teorema que apresentamos em seguida utiliza na sua demonstração o teorema de Tychonoff e é visto por muitos como um corolário deste. Banach apresentou uma prova deste teorema para espaços vectoriais separáveis e normados em 1932 mas a primeira prova, para o caso geral, foi publicada em 1940 pelo matemático Leonidas Alaoglu. No entanto, Bourbaki, Kakutani, e Shmulyan também trabalharam na demonstração deste teorema entre 1929 e 1939.

Teorema 6.11 (Banach-Alaoglu[14])**.** *Seja X um espaço de Banach e*

$$\overline{B}_{x^*} = \{f \in X^* : \|f\|_{X^*} \leq 1\},$$

a bola unitária. Então, $\overline{B}_{x^*}$ é compacto para a topologia $\sigma(X^*, X)$.

Neste momento, podemos introduzir uma topologia em $\mathrm{sp}(A)$ como se segue. $\mathrm{sp}(A)$ é um subconjunto da bola unitária do dual de A e, pelo teorema de Banach-Alaoglu, sabemos que o dual é um espaço compacto de Hausdorff na topologia fraca-$*$. Então, $\mathrm{sp}(A)$ induz uma topologia de Hausdorff como um subespaço de um espaço de Hausdorff compacto.

Teorema 6.12. *Na topologia fraca-$*$,* $\mathrm{sp}(A)$ é um espaço compacto de Hausdorff.

Demonstração. Sabemos já que A^*, com a topologia fraca-$*$, é Hausdorff e o subespaço de um espaço de Hausdorff é Hausdorff.

Para vermos que $\mathrm{sp}(A)$ é compacto é suficiente provar que $\mathrm{sp}(A)$ é fechado na topologia fraca-$*$. O teorema de Banach-Alaoglu vai garantir que $\mathrm{sp}(A)$ é compacto uma vez que é um subconjunto fechado do conjunto compacto fraco-$*$ $\{\omega \in A^* : \|\omega\| \leq 1\}$.

Para ver que $\mathrm{sp}(A)$ é conjunto fechado fraco-$*$, seja $\{\omega_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ uma rede em $\mathrm{sp}(A)$que converge para $\omega \in A^*$, i.e., $\omega_\alpha \to \omega$. Para mostrar que ω está em $\mathrm{sp}(A)$, mostramos que é multiplicativo. Sejam $x, y \in A$ como $\omega_\alpha \to \omega$, temos que $\omega_\alpha(x) \to \omega(x)$, $\omega_\alpha(y) \to \omega(y)$, e $\omega_\alpha(xy) \to \omega(xy)$. Por outro lado,

$$\omega_\alpha(xy) = \omega_\alpha(x)\omega_\alpha(y) \to \omega(x)\omega(y),$$

enquanto que $\omega_\alpha(ax) \to \omega(xy)$. Num espaço de Hausdorff, uma rede converge no máximo para um ponto, pelo que $\omega(xy) = \omega(x)\omega(y)$ e ω é multiplicativo. Como $1 = \omega_\alpha(\mathbf{1}) \to \omega(\mathbf{1})$, ω é não trivial pelo que está no $\mathrm{sp}(A)$. □

6.3 A transformada de Gelfand

Definição 6.13. Seja A uma álgebra de Banach comutativa com unidade. Chamamos transformada de Gelfand à aplicação

$$\hat{} : A \to C(\mathrm{sp}(A))$$
$$x \mapsto \hat{x}$$

que a cada $x \in A$ faz corresponder a função $\hat{x} : \mathrm{sp}(A) \to \mathbb{C}$ tal que,

$$\hat{x}(\omega) = \omega(x).$$

[14] A prova deste teorema encontra-se detalhada em [7], pág. 64.

Teorema 6.14. *Seja A uma álgebra de Banach comutativa e unitária. Para cada $x \in A$, $\hat{x}$ é contínua no* $\mathrm{sp}(A)$. A aplicação de Gelfand Γ,

$$\Gamma : A \to C(\mathrm{sp}(A))$$

$\Gamma(x)(\omega) = \omega(x)$, para $\omega \in \mathrm{sp}(A)$, é um homomorfismo contínuo de A para $C(\mathrm{sp}(A))$. Mais ainda,

$$\|\Gamma(x)\|_\infty = r(x) \leq \|x\|$$

para todo o x, e Γ tem norma 1. A transformada de Gelfand é injectiva se e só se a intersecção de todos os ideais maximais de A é $\{0\}$.

Demonstração. As funções $\hat{x}$ são contínuas pela definição da topologia fraca-$*$: Se ω_α é uma rede no $\mathrm{sp}(A)$ que converge para ω, temos

$$\hat{x}(\omega_\alpha) \equiv \omega_\alpha(x) \to \omega(x) = \hat{x}(\omega).$$

Pelo teorema 4.15, isto mostra que $\hat{x}$ é contínua. Mais ainda, é um homomorfismo uma vez que

$$\hat{x}(\omega)\hat{y}(\omega) = \omega(x)\omega(y) = \omega(xy) = \widehat{xy}(\omega).$$

Para ver que a função $\hat{x}$ é limitada, observamos que

$$\|\hat{x}\|_\infty = \sup{}_{\omega\in\mathrm{sp}(A)}|\hat{x}(\omega)| = \sup\,\{|\lambda| \colon \lambda \in \sigma_A(x)\} = \lim_n \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|x\|, x \in A.$$

Vimos já que todo o elemento ω de $\mathrm{sp}(A)$ satisfaz $\omega(\mathbf{1}) = 1$; segue-se que $\hat{\mathbf{1}}$ é a função constante e igual a 1 em $C(\mathrm{sp(A)})$.

Como $\Gamma(x)$ é a função nula se e só se $\omega(x) = 0$ para todo o $\omega \in \mathrm{sp}(A)$, isto é, se e só se x se encontra no núcleo de todo o $\omega \in \mathrm{sp}(A)$; o núcleo da aplicação Γ é a intersecção de todos os ideais maximais de A. □

Teorema 6.15. *Seja A uma álgebra de Banach comutativa com unidade. Para todo o elemento $x \in A$, temos que*

$$\sigma_A(x) = \{\hat{x}(\omega) : \omega \in \mathrm{sp}(A)\}.$$

Demonstração. Uma vez que para todo o $x \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, $\widehat{x - \lambda} = \hat{x} - \lambda$ e $\sigma(x - \lambda) = \sigma(x) - \lambda$, é suficiente estabelecer a seguinte asserção: Um elemento $x \in A$ é invertível se e só se $\hat{x}$ nunca se anula.

Deste modo, se x é invertível, então existe $y \in A$ tal que $xy = \mathbf{1}$; então, $\hat{x}(\omega)\hat{y}(\omega) = \widehat{xy}(\omega) = 1$, $\omega \in \mathrm{sp}(A)$, pelo que $\hat{x}$ não tem zeros.

Contrariamente, vamos supor que x é um elemento não invertível de A. Temos que mostrar que existe um elemento $\omega \in \mathrm{sp}(A)$ tal que $\omega(x) = 0$. Para isso, considere-se o conjunto $xA = \{xa : a \in A\} \subseteq A$. Este conjunto é um ideal que não contém $\mathbf{1}$. Pela proposição 5.15, xA está contido num ideal maximal $M \subseteq A$, necessariamente fechado. Pelo teorema 6.7 temos que existe um $\omega \in \mathrm{sp}(A)$ tal que o núcleo de ω é M e $\hat{x}$ anula-se em ω porque $x \in xA \subseteq M$. □

Teorema 6.16. *Seja A uma álgebra de Banach unitária e comutativa gerada pelo elemento a: ou seja, o conjunto dos polinómios em a é denso em A. Então, a aplicação $\hat{a} : \mathrm{sp}(A) \to \sigma_A(a) \subset \mathbb{C}$ é um homomorfismo.*

Demonstração. $\hat{a}$ é uma função contínua em sp(A) com ran $\hat{a} = \sigma_A(a)$ i.e., $\hat{a}$: sp$(A) \to \sigma_A(a)$ é contínua e sobrejectiva. Tanto sp(A) como $\sigma_A(a)$ são espaços compactos de Hausdorff, portanto, resta mostrar que $\hat{a}$ é injectiva. Tomemos então $\hat{a}(\omega_1) = \hat{a}(\omega_2)$, tal que $\omega_1(a) = \omega_2(a)$. Usando a multiplicidade de ω_1 e ω_2 vemos que, para um dado $N \in \mathbb{N}$ e $c_0, c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{C}$

$$\omega_1\left(\sum_{n=0}^{N} c_n a^n\right) = \omega_2\left(\sum_{n=0}^{N} c_n a^n\right).$$

Como ω_1 e ω_2 são contínuos e a gera A, segue-se que $\omega_1 = \omega_2$. $\square$

O próximo exemplo mostra que a transformada de Gelfand pode não ser injectiva.

Exemplo 6.2. Seja A a subálgebra de $M_2(\mathbb{C})$ que consiste nos elementos da forma $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right)$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Então,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha\mathbf{1} + \beta q, \text{onde } q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que $q^2 = 0$ (i.e., q é nilpotente). A é uma álgebra de Banach comutativa, de dimensão 2 com unidade $\mathbf{1}$. Vamos calcular o espectro, $\sigma_A(x)$, para $x = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right)$. De facto, para $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$x - \lambda\mathbf{1} = \begin{pmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ 0 & \alpha - \lambda \end{pmatrix}$$

é invertível em $M_2(\mathbb{C})$ se e só se $\lambda \neq \alpha$. Se $\lambda \neq \alpha$, tem-se que

$$(x - \lambda\mathbf{1})^{-1} = \begin{pmatrix} (\alpha - \lambda)^{-1} & -\beta(\alpha - \lambda)^{-2} \\ 0 & (\alpha - \lambda)^{-1} \end{pmatrix},$$

que pertence a A. Deste modo, $\sigma_A(x) = \sigma_A(\alpha\mathbf{1} + \beta q) = \{\alpha\}$. Em particular, $\sigma_A(q) = \sigma_A(\beta q) = \{0\}$, e $q \neq 0$.

Consideremos agora os caracteres de A. Se ω é uma carácter, $\omega(xy) = \omega(x)\omega(y)$ implica que $\omega(q^2) = \omega(q)\omega(q)$. Mas $q^2 = 0$ e, por isso, $\omega(q) = 0$. Como $\omega(\mathbf{1}) = 1$, percebemos que $\omega(\alpha\mathbf{1} + \beta q) = \alpha$, para qualquer $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Por outras palavras, existe apenas um carácter em A; sp(A)= $\{\omega\}$, onde ω é dado unicamente pela acção $\omega(\mathbf{1}) = 1$ e $\omega(q) = 0$.

A transformada de Gelfand é a aplicação $x \mapsto \hat{x}, \alpha\mathbf{1} + \beta q \mapsto \alpha\hat{\mathbf{1}} + \beta\hat{q}$. Mas $\hat{\mathbf{1}} = 1$ e $\hat{q}(\omega) = \omega(q) = 0$, pelo que $\hat{q} = 0$ e temos que $\widehat{\alpha\mathbf{1} + \beta q} = \alpha$, para todo o $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. A trasformada $\hat{}$ tem núcleo $\{\beta q : \beta \in \mathbb{C}\}$, por isso, vemos que $\hat{}$ não é um isomorfismo.

A álgebra A tem exactamente um ideal maximal: o núcleo de ω. A é a álgebra unitária gerada pelo elemento q e por isso sp$(A) \simeq \sigma_A(q)$; o respectivo homomorfismo é $\hat{q}$: sp$(A) \to \sigma_A(q), \omega \mapsto \hat{q}(\omega) = 0$. De facto, tanto sp$(A)$ como $\sigma_A(q)$ têm apenas um elemento.

Alternativamente, podemos determinar o espectro de $x \in A$ usando a igualdade $\sigma_A(x) = $ ran $\hat{x}$. Para $x = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right)$, temos

$$\begin{aligned}\sigma_A(x) &= \{\hat{x}(\omega)\} = \{\omega(x)\}\\ &= \{\omega(\alpha\mathbf{1} + \beta q)\}\\ &= \{\alpha\omega(\mathbf{1}) + \beta\omega(q)\}\\ &= \{\alpha\}(\omega(q) = 0).\end{aligned}$$

O próximo teorema é um resultado conhecido da Topologia e vai ser fundamental para provar que a função Φ, a seguir introduzida, é um homeomorfismo.

Teorema 6.17. *Seja $f : X \to Y$ uma função contínua e bijectiva. Se X é um conjunto compacto e Y é Hausdorff então f é um homeomorfismo*[15].

Teorema 6.18. *Seja X um espaço compacto de Hausdorff. Para cada $x \in X$, a aplicação*

$$\begin{gathered}\Phi : X \to \mathrm{sp}(C(X))\\ x \to \omega_x;\end{gathered}$$

é um homeomorfismo[16] *de X em* sp(C(X)).

Neste caso, a transformada de Gelfand torna-se a aplicação identidade de $C(X)$ em $C(X)$. Em particular, o espectro de $f \in C(X)$ é $f(X)$.

Demonstração. Todo o ponto $x \in X$ determina um homomorfismo complexo $\omega_x \in$ sp(C(X)) dado pela igualdade:

$$\omega_x(f) = f(x), \quad f \in C(X).$$

Comecemos por observar que dados dois pontos $x_1, x_2 \in X$ tais que $x_1 \neq x_2$, o Lema de Urysohn[17] garante que existe um $f \in C(X)$ tal que $f(x_1) = 1$ e $f(x_2) = 0$. Então, $\Phi(x_1)(f) = f(x_1) \neq f(x_2) = \Phi(x_2)(f)$. Isto é, Φ é injectiva.

Vamos agora mostrar que Φ é sobrejectiva. Seja $\omega \in$ sp(C(X)). Considere-se

$$I = \{f \in C(X) : \omega(f) = 0\} = \ker\omega.$$

Vamos afirmar que existe um $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = 0$ para todo o $f \in I$. Se tal não fosse verdade, para cada $x \in X$, existiria um $f_x \in I$ tal que $f_x(x) \neq 0$. Como f_x é contínua, existe um conjunto aberto U_x que contém x tal que $f_x(z) \neq 0$ para todo o $z \in U_x$. Desta forma, $X \subseteq \bigcup_{x\in X} U_x$. Como X é compacto, existem $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tais que $X \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_{x_k}$.

Define-se agora uma função auxiliar

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{x_k}(x)|^2, x \in X.$$

[15] Em [5], pág. 167.

[16] Sejam X e Y espaços topológicos; Seja $f : X \to Y$ bijectiva. Se ambas as funções f e a sua inversa, $f^{-1} : Y \to X$ são contínuas então f é um homeomorfismo.

[17] Seja X um espaço normado e A e B subconjuntos fechados de X. Seja $[a, b]$ um intervalo fechado da recta real. Então existe uma aplicação contínua $f : X \to [a, b]$ tal que $f(x) = a$ para todo o x em A e $f(x) = b$ para todo o x em B.

Pela definição dos f_{x_k}, podemos concluir que $h(x)$ não se anula em X pelo que é invertível[18] em $C(X)$. Porém

$$\begin{aligned}
\omega(h) &= \omega(\sum_{k=1}^{n} f_{x_k}\overline{f_{x_k}}) \quad \text{em } \mathbb{C}, |z|^2 = z\overline{z} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \omega(f_{x_k}\overline{f_{x_k}}) \quad \text{linearidade de } \omega \\
&= \sum_{k=1}^{n} \omega(f_{x_k})\omega(\overline{f_{x_k}}) \quad \omega(fg) = \omega(f)\omega(g) \\
&= \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \omega(\overline{f_{x_k}}) = 0 \quad \text{uma vez que } f_{x_k} \in I,
\end{aligned}$$

contradizendo o facto de h ser invertível e de ω ser multiplicativo. Então, $f(x_0) = 0$ para todo o $f \in I$.

Considere-se agora $g \in C(X)$. Temos que

$$\begin{aligned}
\omega(g - \omega(g)\mathbf{1}) &= \omega(g) - \omega(\omega(g)\mathbf{1}) \quad \text{(linearidade)} \\
&= \omega(g) - \omega(g) \cdot \omega(\mathbf{1}) \\
&= \omega(g) - \omega(g) \cdot 1 = 0 \in I.
\end{aligned}$$

Observe-se que

$$(g - \omega(g) \cdot \mathbf{1})(x_0) = 0,$$

isto é, $\omega(g) = g(x_0) = \omega_{x_0}(g)$ pelo que os únicos homomorfismos em sp(C(X)) são $\omega = \omega_{x_0}$ e Φ é sobrejectiva.

Seja $x_\alpha \in X$ tal que $x_\alpha \to x$ em X. Então,

$$\Phi_{x_\alpha}(f) = f(x_\alpha) \to f(x) = \Phi_x(f),$$

para todo o $f \in C(X)$. Isto é, $\Phi(x_\alpha) \to \Phi(x)$ e Φ é contínua.

Até ao momento vimos que sp(C(X)) é Hausdorff e w^*-compacto. Por hipótese, X é compacto. Entao, pelo teorema 6.17, Φ é um homeomorfismo.

Se identificarmos sp(C(X)) com X, a aplicação de Gelfand $\Gamma : C(X) \to C(X)$ é a transformada identidade. □

Neste momento temos as ferramentas necessárias para calcular o espectro de Gelfand do espaço $l^1(\mathbb{Z})$, as sucessões infinitas de números complexos $x = (x_n)$,

$$l^1(\mathbb{Z}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n| < \infty\},$$

com a norma $\|x\| = \sum_{-\infty}^{\infty} |x_n|$ e multiplicação definida pelo produto de convolução

$$(x * y)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k y_{n-k}, \quad x, y \in l^1(\mathbb{Z}).$$

[18] $f \in C(X)$ invertível $\iff f(x) \neq 0, \quad \forall x \in X, f^{-1} = \frac{1}{f}$.

Exemplo 6.3. Para $f \in C(S^1)$ e $n \in \mathbb{Z}$, seja $c_n(f)$ o n-ésimo coeficiente de Fourier dado por:

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-int}dt.$$

Seja $AC(S^1)$ o espaço de todas as funções $f \in C(S^1)$ cuja série de Fourier, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int}$, é absolutamente convergente, i.e., $f \in AC(S^1)$ se e só se $(c_n(f))_n \in l^1(\mathbb{Z})$. Reciprocamente, dado $(c_n)_n \in l^1(\mathbb{Z})$, definimos $f \in C(S^1)$ por

$$f(e^{it}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikt}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Então, para cada $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikt}\right) e^{-int}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}dt \\ &= c_n. \end{aligned}$$

Deste modo, quando equipado com a norma $\|f\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|$, $AC(S^1)$ é um espaço de Banach isometricamente isomorfo a $l^1(\mathbb{Z})$. Para $f, g \in AC(S^1)$ e $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} c_n(fg) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-int}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g)e^{-ikt}\right)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g)\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-i(n-k)t}dt \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g)c_{n-k(f)}, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(fg)| \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}}|c_j(f)| \cdot \sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k(g)|,$$

e $AC(S^1)$ é uma álgebra de Banach comutativa quando considerada a multiplicação pontual. Assim, o produto em $l^1(\mathbb{Z})$ que torna a aplicação $f \to (c_n(f))_n$ um isomorfismo entre as álgebras $AC(S^1)$ e $l^1(\mathbb{Z})$ é $(\alpha\beta)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_{n-k}\beta_k$, para $(\alpha_n)_n$ e $(\beta_n)_n$ em $l^1(\mathbb{Z}), n \in \mathbb{Z}$.

Para $z \in S^1$, definimos $\omega_z : l^1(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ por

$$\omega_z(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)z^{-n}.$$

Então, para $f, g \in l^1(\mathbb{Z})$,

$$\begin{aligned} \omega_z(f * g) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(n-m)g(m)\right)z^{-n} && (5) \\ &= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} f(n)g(m)z^{-(n+m)} && (6) \\ &= \omega_z(f)\omega_z(g). && (7) \end{aligned}$$

Observamos que $\omega_z \in \mathrm{sp}(l^1(\mathbb{Z}))$ e a aplicação $z \to \omega_z$ é injectiva. Reciprocamente, cada $\omega \in \mathrm{sp}(l^1(\mathbb{Z}))$ é desta forma. De facto, seja $z = \omega(\delta_{-1})$, onde δ é o delta de Dirac que corresponde ao funcional

$$\begin{aligned} \delta : C(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ f &\to f(0) \end{aligned}$$

tal que $\delta(f) = f(0)$. Mais ainda, $\delta = (\delta_{0n})$ onde

$$\delta_{0n} := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

é a identidade de $l^1(\mathbb{Z})$ e $e_n * e_m = e_{n+m}$, para todo o $n, m \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$\omega(\delta_{-n}) = \omega(\underbrace{\delta_{-1} * \ldots * \delta_{-1}}_{n}) = \omega(\delta_{-1})^n = z^n,$$

e $\omega(\delta_n) = 1/\omega(\delta_{-n}) = z^{-n}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que combinações lineares finitas de funções de Dirac δ_n, $n \in \mathbb{N}$, são densas[19] em $l^1(\mathbb{Z})$, segue-se que $\omega = \omega_z$ e verifica-se agora facilmente que a aplicação $z \to \omega_z$ é um homeomorfismo.

Podemos identificar $\mathrm{sp}(AC(S^1))$ com S^1 da seguinte forma. Para $z \in S^1$,

$$\omega_z(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) z^n, \quad f \in AC(S^1).$$

Assim, $z \to \omega_z$ é um homeomorfismo entre S^1 e $\mathrm{sp}(AC(S^1))$. Por fim, temos que

$$\hat{f}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) z^n = f(z),$$

para todo o $f \in AC(S^1)$ e a transformada de Gelfand de $AC(S^1)$ é a identidade.

7 Álgebras-C*

Definição 7.1. Uma **álgebra-$*$** normada (Banach) é uma álgebra de Banach A que, dada a involução $x \mapsto x^*$, satisfaz:

1. $(\lambda x + y)^* = \overline{\lambda} x^* + y^*$ para $\lambda \in \mathbb{C}$, $x^* \in A$, $\forall x \in A$;
2. $(x^*)^* = x$ para todo o $x \in A$;
3. $(xy)^* = y^* x^*$ para qualquer $x, y \in A$;
4. $\|x^*\| = \|x\|$.

Definição 7.2. Uma álgebra de Banach A diz-se uma **álgebra-C^*** se e só se estiver definida uma involução em A tal que

$$\|x^* x\| = \|x\|^2 \quad (\text{Equação-}C^*),$$

para todo o $x \in A$.

[19] Consultar [4].

Numa álgebra-$*$ normada de Banach, a involução $x \to x^*$ é contínua. Se $x_i \to x$ temos que $\|x_i - x\| \to 0$. Mas $\|x_i^* - x^*\| = \|(x_i - x)^*\| = \|x_i - x\| \to 0$. Além disso, se A tem unidade $\mathbf{1}$, então

$$\mathbf{1}^* = \mathbf{1}^*\mathbf{1} = (\mathbf{1}^*\mathbf{1})^* = \mathbf{1}^{**} = \mathbf{1},$$

e $\|\mathbf{1}\| = 1$.

Definição 7.3. Um elemento x numa álgebra-C^* A diz-se **autoadjunto** (ou simétrico ou hermitiano) se $x^* = x$. Um elemento $x \in A$ é **normal** se $xx^* = x^*x$. Um elemento u numa álgebra-C^* unitária A é **unitáro** se $uu^* = u^*u = \mathbf{1}$.

Definição 7.4. Um **homomorfismo-$*$** entre álgebras-C^* é uma aplicação linear e multiplicativa ρ tal que $\rho(a^*) = \rho(a)^*$, para todo o a na álgebra-C^* que pertence ao domínio. Se ρ é uma bijecção de A para B, dizemos que ρ é um isomorfismo-$*$ que preserva a estrutura-C^*, i.e., A e B são "iguais" enquanto álgebras-C^*, quando são isomorfas-$*$.

Exemplo 7.1. Consideremos $\mathbb{C}$ com a multiplicação usual, norma dada pelo valor absoluto e a involução obtida a partir do conjugado: $z^* = \overline{z}$. A equação-C^* é a equação $|\overline{z}z| = |z|^2$. $\mathbb{C}$ é uma álgebra-C^*, comutativa e com unidade 1.

Exemplo 7.2. Seja Ω um espaço compacto. $C(\Omega)$ é uma álgebra-C^* comutativa com unidade, quando equipada com a norma do supremo e a involução $f \mapsto f^* = \bar{f}$. Como $f^*f = |f|^2$ segue-se que $\|f^*f\|_\infty = \|f\|_\infty^2$.

Exemplo 7.3. Seja Ω um espaço topológico. $C_b(\Omega)$ é a álgebra das funções complexas, contínuas e limitadas em Ω, e é uma álgebra-C^* comutativa com unidade.

O próximo teorema diz que todo o homomorfismo complexo de uma álgebra-C^* é automaticamente um homomorfismo-$*$.

Teorema 7.5. *Seja A uma álgebra-C^* unitária e $\omega : A \to \mathbb{C}$ um homomorfismo. Para todo o $x \in A$, temos*[20] *que $\omega(x^*) = \overline{\omega(x)}$.*

Teorema 7.6. *Se A é uma álgebra-C^*, comutativa e unitária e $x \in A$ é autoadjunto, então $\sigma_A(x)$ está contido na recta real.*

Demonstração. Se $\lambda \in \sigma_A(x)$, sabemos, pelo teorema 6.9, que $\lambda = \omega(x)$ para algum $\omega \in \mathrm{sp}(A)$. Pelo teorema 7.5,

$$\overline{\lambda} = \overline{\omega(x)} = \omega(x^*) = \omega(x) = \lambda$$

uma vez que x é autoadjunto. □

Teorema 7.7. *Suponhamos que A e B são álgebras-C^* com identidade comum $\mathbf{1}$, e vamos assumir que $B \subseteq A$. Então, se $a \in B$, temos que $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$*[21]*.*

Lema 7.8. *Seja A uma álgebra-C^* unitária e $x \in A$ normal. Então,*

(i) $\|x^2\| = \|x\|^2$ *e* $r_\sigma(x) = \|x\|$.

[20] A prova deste teorema encontra-se detalhada em [3], pág. 121.
[21] A prova encontra-se em [3], pág. 136.

(ii) x é autoadjunto, $x = x^*$, se e só se $\sigma_A(x) \subseteq \mathbb{R}$.

Demonstração. (i) Usando a equação-C^* temos

$$\|x^2\| = \|(x^2)^*(x^2)\|^{\frac{1}{2}} = \|x^*xx^*x\|^{\frac{1}{2}} = \|x^*x\| = \|x\|^2.$$

Por indução, temos que $\|x^{2^n}\| = \|x\|^{2^n}$. Por fim, $r_A(x) = \lim_{k\to\infty}\|x^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \|x\|$.

(ii) Seja B uma álgebra-C^*, comutativa. O teorema 7.7 diz-nos que $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$. A aplicação de Gelfand $\Gamma : B \to C(\mathrm{sp}(B))$ é um isomorfismo-$*$, pelo que x é autoadjunto se e só se $\hat{x}$ é autoadjunto enquanto elemento de $C(\mathrm{sp}(B))$ i.e., se e só se $\hat{x}$ toma valores em $\mathbb{R}$. Pela comutatividade de B, a imagem de $\hat{x}$ é $\{\omega(x) : \omega \in C(\mathrm{sp}(B))\} = \sigma_B(x)$. Concluímos que x é autoadjunto se e só se $\sigma_B(x)$, ou de forma equivalente $\sigma_A(x)$ está contida em $\mathbb{R}$.

□

Exemplo 7.4. A álgebra do disco $A(\mathcal{D})$ é uma álgebra-$*$ de Banach com uma involução dada por $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$. No entanto, não é uma álgebra-C^*:

$$\mathbf{1} \in A(\mathcal{D}) \Rightarrow \mathbf{1}^*(z) = \overline{\mathbf{1}(\overline{z})} = \overline{\overline{z}} = z \Rightarrow \mathbf{1} = \mathbf{1}^*,$$

observamos que

$$\sigma_A(\mathbf{1}) = \mathbf{1}(\mathcal{D}) = \mathcal{D} \nsubseteq \mathbb{R},$$

o que não pode acontecer, uma vez que o lema 7.8 garante que se $A(\mathcal{D})$ fosse uma álgebra-C^* teríamos $\sigma_A(x) \subseteq \mathbb{R}$.

É natural perguntar se a involução das funções contínuas $f \mapsto f^* = \bar{f}$ ainda é válida na álgebra do disco. Para isso, recordamos o seguinte teorema da análise complexa:

Teorema 7.9 (Equações de Cauchy-Riemann)**.** *Se f é diferenciável em $z_0 = x_0 + iy_0$ então*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

em (x_0, y_0). Além disso, a derivada é dada por

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Teorema 7.10. *Sejam $u, v : \Omega \to \mathbb{C}$ funções de classe C^1 numa aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Então a função $f = u + iv$ é holomorfa em Ω se e só se as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas em todos os pontos[22] de Ω.*

Exemplo 7.5. Voltamos novamente ao exemplo da álgebra do disco. Seja

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

e consideramos a involução

$$g(z) = \overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y) = U(x, y) + iV(x, y).$$

[22]Demonstração em [2].

Se f é holomorfa em $\mathcal{D}$ então verifica as equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

De igual modo, se g é holomorfa temos que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

com $U = u$ e $V = -v$. Deste modo, g não verifica as equações de Cauchy-Riemann e f não é holomorfa para a involução das funções contínuas.

Teorema 7.11. *Seja A uma álgebra-C^*, comutativa e com unidade. A transformada de Gelfand Γ é um isomorfismo isométrico-$*$ de A em $C(\mathrm{sp}(A))$.*

Demonstração. Pelo teorema 6.14 apenas temos que provar que a transformada de Gelfand Γ preserva a propriedades-$*$, é isométrica e bijectiva.

Comecemos por ver que preserva a propriedade-$*$, i.e., vamos mostrar que

$$\Gamma(x^*) = \overline{\Gamma(x)},$$

ou $\widehat{x^*} = \overline{\hat{x}}$ para um x arbitrário. Dado $\omega \in \mathrm{sp}(A)$, $\widehat{x^*}(\omega) = \omega(x^*)$ e $\overline{\hat{x}(\omega)} = \overline{\omega(x)}$. Pelo teorema 7.5 temos que $\omega(x^*) = \overline{\omega(x)}$. Isto verifica que $\widehat{x^*} = \overline{\hat{x}}$.

Vimos no teorema 6.14, que $\|\widehat{x}\|_\infty \leq \|x\|$ para todo o $x \in A$. Se supusermos que x é autoadjunto, temos

$$\|x\| = r(x) = \|\hat{x}\|_\infty = \|\Gamma(x)\|_\infty.$$

Em particular, para qualquer x temos que $\|\Gamma(x^*x)\|_\infty = \|x^*x\|$, uma vez que x^*x é autoadjunto. Então, para qualquer x,

$$\begin{aligned} \|\Gamma(x)\|_\infty^2 &= \|\Gamma(x)^*\Gamma(x)\|_\infty \quad \text{equação-}C^*, \\ &= \|\Gamma(x^*x)\|_\infty \quad \Gamma \text{ é um homomorfismo-}*, \\ &= \|x^*x\| = \|x\|^2 \quad \text{equação-}C^*. \end{aligned}$$

Γ é uma isometria.

Vamos mostrar que a imagem de A por Γ é todo o $C(\mathrm{sp}(A))$. Para isso, usamos o teorema de Stone-Weierstrass[23]. Admitimos que $\Gamma(A)$ é um subespaço fechado de $C(\mathrm{sp}(A)\ )$ e uma subálgebra de $C(\mathrm{sp}(A))$ que contém as funções constantes, separa os pontos de $\mathrm{sp}(A)$ e é fechado para o conjugado. Como Γ é uma isometria e um homomorfismo-$*$, vemos que $\Gamma(A)$ é uma subálgebra fechada que também é fechada para o conjugado.

Uma vez que $\Gamma(\lambda\mathbf{1})$ é a função constante λ, esta subálgebra contém as constantes. Ela separa pontos uma vez que, se $\omega_1 \neq \omega_2$ em $\mathrm{sp}(A)$, podemos encontrar um $x \in A$ tal que $\omega_1(x) \neq \omega_2(x)$ e $\Gamma(x)(\omega_1) \neq \Gamma(x)(\omega_2)$. Invocando o teorema de Stone-Weierstrass concluímos que $\Gamma(A) = C(\mathrm{sp}(A)\ )$. □

O último resultado que vamos ver neste trabalho relaciona de forma inesperada espaços algébricos e espaços topológicos, ou seja, é possível dizer que os espaços $C(X_1)$ e $C(X_2)$ são equivalentes, dado um homeomorfismo entre os espaços compactos de Hausdorff X_1 e X_2.

[23]Se B é uma subálgebra fechada de $C(X)$ que separa pontos, contém as funções constantes e é fechada para o conjugado, então $B = C(X)$.

Lema 7.12. *Sejam X_1 e X_2 espaços compactos de Hausdorff. Seja $h : X_1 \to X_2$ um homemorfismo. Então $T : C(X_2) \to C(X_1)$, tal que $T(f) = f \circ h$, é uma isometria linear sobrejectiva.*

Demonstração. Começamos por ver que T está bem definida uma vez que a composição de funções contínuas é uma função contínua, i.e., $T(f) \in C(X_1)$ para todo o $f \in C(X_2)$. Mais ainda, T é uma aplicação linear pois $T(f+g) = (f+g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h) = T(f) + T(g)$. Observamos agora que T é um operador limitado:

$$\|T(f)\| = \sup\{|f(h(x_1))|: x_1 \in X_1\} \leq \sup\{|f(x_2)|: x_2 \in X_2\} = \|f\|.$$

A desigualdade verifica-se porque $f(h(X_1)) \subseteq f(X_2)$ e T é um operador linear limitado com $\|T\| \leq 1$. Além disso, como h é sobrejectiva temos que $h(X_1) = X_2$, pelo que $\sup\{|f(h(x_1))|: x_1 \in X_1\} = \sup\{|f(x_2)|: x_2 \in X_2\}$, i.e., $\|T(f)\| = \|f\|$, para todo o $f \in C(X_1)$, e T é uma isometria.

Falta apenas provar que T é sobrejectiva. Olhamos de novo para as propriedades de h: como h é injectiva e X_1 é compacto temos que $h : X_1 \to h(X_1)$ é um homeomorfismo. Seja $g \in C(X_1)$. A função $g \circ h^{-1} : h(X_1) \to \mathbb{R}$ é contínua. Pelo teorema da extensão de Tietze[24] , existe um $f \in C(X_2)$ tal que $f(t) = (g \circ h^{-1})(t)$ para todo o $t \in h(X_1)$ e $f(h(x_1)) = g(x_1)$ para todo o $x_1 \in X_1$, i.e., $T(f) = g$. □

Este lema é apenas a verificação de uma das implicações do teorema de Banach-Stone e a sua demonstração completa encontra-se, de forma muito interessante e detalhada, em [6], para o qual recomendamos a leitura. Em alternativa consultar também [4].

Teorema 7.13 (Banach-Stone)**.** *Sejam X_1 e X_2 dois espaços compactos de Hausdorff. Então,*

$$X_1 \simeq X_2 \iff C(X_1) \simeq C(X_2).$$

Referências

[1] Arveson, William, *A short Course on Spectral Theory*, Springer-Verlag, 2002

[2] Barreiras, Luís, *Análise complexa e equações diferenciais*, IST Press, 2009

[3] D. MacCluer, Barbara, *Elementary Functional Analysis*, Springer, 2009

[4] Kaniuth, Eberhard, *A course in commutative Banach Algebras*, Springer, 2009

[5] Munkers, James R., *Topology*, Massachusetts Institute of Technology, Second Edition, 2000

[24]Seja X um espaço normal; Seja A um subespaço fechado de X.

- Qualquer aplicação contínua de A para o intervalo fechado [a,b] em $\mathbb{R}$ pode ser extendida a uma aplicação contínua de todo o espaço X em [a,b].
- Qualquer aplicação contínua de A em $\mathbb{R}$ pode ser extendida a uma aplicação contínua de todo o X em $\mathbb{R}$.

[6] Paulos, João, *Espaços C(K)*, Trabalho no âmbito da unidade curricular Seminário e Monografia, Instituto Superior Técnico, 2014

[7] Pinto, Paulo R., *Análise Funcional*, Departamento de matemática IST, 2.ª Edição, 2013

[8] *http://homepage.ntlworld.com/ivan.wilde/notes/calg/calg.pdf* consultado em Abril de 2014

[9] *http://www.telegraph.co.uk/news/obituaries/science-obituaries/6440484/Israel-Gelfand.html* consultado em Abril de 2014

[10] *http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Banach.html* consultado em Abril de 2014