Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Ano Lectivo 2015/2016
16 de Outubro de 2015
Duração: 45 minutos

RESOLUÇÃO DO TESTE 1 DE ÁLGEBRA LINEAR

MEAmbi - MEBiol

1. Usando operações elementares temos $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ \alpha & 3 & 2 & 2\beta \\ 2 & 2 & \alpha+1 & \beta \end{array}\right] \xrightarrow[-2L_1+L_3]{-\alpha L_1+L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3-\alpha & 2-\alpha & 2\beta-2\alpha \\ 0 & 0 & \alpha-1 & \beta-4 \end{array}\right]$. Para $\alpha = 1$, a última matriz é $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2\beta-2 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-4 \end{array}\right]$ e para $\alpha = 3$ é $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2\beta-6 \\ 0 & 0 & 2 & \beta-4 \end{array}\right] \xrightarrow{2L_2+L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2\beta-6 \\ 0 & 0 & 0 & 5\beta-16 \end{array}\right]$.

   (a) Assim, pelo método de eliminação de Gauss temos que o sistema é possível e indeterminado sse:
   - $\alpha = 1$ e $\beta = 4$

   ou
   - $\alpha = 3$ e $\beta = \frac{16}{5}$.

   (b) Para α=3 e β=$\frac{8}{3}$ o sistema é equivalente ao sistema cuja matriz aumentada é: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{28}{3} \end{array}\right]$.
   Logo, o sistema é impossível e assim o conjunto solução é $\mathcal{S} = \emptyset$.

2. Temos $AB = \mathbf{O}$, pois para quaisquer i, j:

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{100} a_{i,k}b_{k,j} = \sum_{k=1}^{100} i^2(-1)^{k+j} = i^2(-1)^j \sum_{k=1}^{100}(-1)^k = i^2(-1)^j \cdot 0 = 0.$$

3. (a) $\det(A) \underset{\substack{\text{F. Laplace} \\ \text{na 2ª coluna}}}{=} -\det \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{F. Laplace} \\ \text{na 3ª coluna}}}{=} +\det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 1$ e $\det(A_{34}) = \det \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 0$. Portanto

$$(A^{-1})_{4,3} = \frac{(-1)^{3+4}}{\det A} \det(A_{34}) = 0.$$

   (b) Como $BA = I$ e $\det(-A^{-1}A^T) = (-1)^4 \det(A)^{-1} \det(A) = 1$, $(\mathbf{X}+2I)A^{-1} = B+\det(-A^{-1}A^T)A^{-1}$ sse $\mathbf{X} + 2I = I + I$ (multiplicando à direita por A na equação incial). Logo $\mathbf{X} = \mathbf{0}$.

4. Como $\det(A) = 1$, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\text{cof } A)^T = (\text{cof } A)^T$. Note-se que a entrada (i, j) de cof A é dada por $(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$. Usando (p.ex.) a fórmula de Laplace, podemos concluir que $\det(A_{ij})$ é um número inteiro, pois as entrada de A são todas inteiras. Assim $A^{-1} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z})$.