RESOLUÇÃO DO TESTE DE RECUPERAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR

MEAmbi - MEBiol

I (T1 +T2 - 10 valores - 90 minutos)

1. Usando o método de eliminação de Gauss: $[A_\alpha |\ \mathrm{b}_\alpha] =$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha & \alpha & 2\alpha-1 \\ 0 & 2 & 2\alpha & 2 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{-2L_1+L3}{\xrightarrow{-\alpha L_1+L_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-\alpha^2 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 2\alpha-2 & 2-2\alpha & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-\alpha L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 2\alpha-2 & 2-2\alpha & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-\alpha^2 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

(a) O sistema linear é possível e indeterminado sse $\alpha \neq 0$. Para $\alpha = 0$, o sistema é impossível.

(b) Se o sistema $A_\alpha \mathtt{x} = \mathrm{b}_\alpha$ é possível, então a primeira variável x é automaticamente livre (pois a 1ª coluna de A_α é nula). Portanto não existe nenhum α tal que o conjunto solução de $A_\alpha \mathtt{x} = \mathrm{b}_\alpha$ seja dado pelo conjunto do enunciado (neste conjunto, $x = 0$).

(c) $\{(1,0,2,0),(1,0,0,0)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A_0)$, pelo que $\mathcal{C}(A_0) = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y = 0, w = 0\}$ e $\mathcal{N}(A_0) = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y + z = 0\}$. Logo

$$\mathcal{C}(A_0) \cap \mathcal{N}(A_0) = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y = 0, w = 0, y + z = 0\} = L(\{(1,0,0,0)\}).$$

Portanto $\{(1,0,0,0)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A_0) \cap \mathcal{N}(A_0)$. Finalmente, $\dim(\mathcal{C}(A_0) + \mathcal{N}(A_0)) = \dim(\mathcal{C}(A_0)) + \dim(\mathcal{N}(A_0)) - \dim(\mathcal{C}(A_0) \cap \mathcal{N}(A_0)) = 2 + 2 - 1 = 3.$

2. (a) $$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \underset{\text{na 4ª coluna}}{\underset{\text{F. Laplace}}{=}} \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\text{na 2ª coluna}}{\underset{\text{F. Laplace}}{=}} -2\det\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - 0 = 18.$$

(b) $$(A^{-1})_{(4,3)} = \frac{(-1)^{3+4}\ \det(A_{34})}{\det A} = \frac{-\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}}{18} = 0.$$

(c) $$\det\left(A^{-1}B + A^{-1}C^T\right) = \det(A^{-1}(B + C^T)) = \det(A^{-1})\det\left(B + C^T\right)$$
$$= \frac{\det\left(B^T + C^T\right)}{18} = \frac{\det\left((B+C)^T\right)}{18} = -\frac{\det(B+C)}{26} = \frac{\det(A)}{18} = 1.$$

3. (a) Seja $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in V$. Dado que $p(1-t) = (a_0 + a_1 + a_2) - (a_1 + 2a_2)t + a_2 t^2$, $p(t) = p(1-t)$ sse $a_0 + a_1 + a_2 = a_0$ e $-a_1 - 2a_2 = a_1$, o que é equivalente a $a_1 + a_2 = 0$, logo $p(t) = a_0 - a_2 t + a_2 t^2 = a_0 + a_2(-t + t^2)$. Portanto $\{1, -t + t^2\}$ é uma base ordenada de V. Finalmente, as coordenadas de $1 - t + t^2$ são (α, β) tais que $1 - t + t^2 = \alpha 1 + \beta(-t + t^2)$, i.e. $(\alpha, \beta) = (1, 1)$.

(b) $S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} = S^{-1}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$, pelo que por definição de $S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1}$, temos: $q_1(t) = 5(-t + t^2) - 4 = -4 - 5t + 5t^2$ e $q_2(t) = -6(-t + t^2) + 5 = 5 + 6t - 6t^2$.

(c) Pretendemos encontrar um polinómio $a + bt + ct^2$ tal que $\{1,\ -t + t^2, a + bt + ct^2\}$ seja uma base de $\mathcal{P}_2$. É suficiente (e necessário) que car$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix} = 3$ (i.e. $b + c \neq 0$). Por exemplo, $a = b = c = 1$ satistaz esta condição, oroginando o polinómio $1 + t + t^2$.

4. Como $V_1 \cap V_2 \subset V_1 \subseteq V_1 + V_2$, $\dim(V_1 \cap V_2) \leq \dim(V_1) \leq \dim(V_1 + V_2)$. Assim, a hipótese implica que $\dim(V_1) = \dim(V_1 \cap V_2)$ ou $\dim(V_1) = \dim(V_1 + V_2)$. Como $V_1 \cap V_2$ é subespaço linear de V_1 e $\dim(V_1) < \infty$, $\dim(V_1) = \dim(V_1 \cap V_2)$ implica $V_1 = V_2 \cap V_1$ e portanto $V_1 \subseteq V_2$ (de forma análoga, se $\dim(V_1) = \dim(V_1 + V_2)$ então $V_1 = V_1 + V_2$ então $V_2 \subseteq V_1$).

II (T3 - 10 valores - 90 minutos)

1. (a) Temos $Au_1 = -2u_1$, $Au_2 = -2u_2$ e $Au_3 = 7u_3$, pelo que u_1, u_2 e u_3 são valores próprios de A. Os vectores u_1 e u_2 são vectores próprios linearmente independentes associados ao valor próprio $\lambda_1 = -2$, logo $2 \leq \text{mg}(\lambda_1) \leq \text{ma}(\lambda_1)$. Por outro lado, $\lambda_2 = 7$ é o valor próprio associados ao vector u_3. Como a matriz A é 3×3, podemos concluir que $\text{ma}(\lambda_1) = 2$ e $\text{ma}(\lambda_2) = 1$.

   (b) A matriz A é ortogonalmemnte pois A é simétrica. Como u_1, u_2 e u_3 são ortogonais 2 a 2, as colunas de Q^T podem ser dadas por $\frac{u_1}{||u_1||}$, $\frac{u_2}{||u_2||}$ e $\frac{u_3}{||u_3||}$. Logo

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}.$$

   (c) Q é indefinida pois $Q(x, y, z) = [x\ y\ z]A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, onde A é matriz simétrica dada no enunciado deste grupo, e A tem alguns valores próprios negativos e outro(s) positivo(s).

2. (a) Basta verificar que $T(1, 0) \in U$ e $T(0, 1) \in U$. Ora, $T(1, 0) = (1, 1, 6) = 2u_1 - u_2 \in U$ e $T(0, 1) = (0, 1, -3) = -u_1 + u_2 \in U$ (onde usámos $u_1 = (1, 2, 3)$ e $u_2 = (1, 3, 0)$).

   (b) Usando (a), $A = M(T; Bc; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (T é sobrejectiva pois $\text{car}(A) = \dim(U)$).

   (c) Como T é bijectiva (a matriz A de (b) é invertível), existe uma única solução da equação linear. Como $(\mathbf{1}, \mathbf{0})$ são as coordenadas de $(1, 2, 3)$ na base $\mathcal{B}$ e a base inicial é a canónica, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. (a) Como $V = \mathcal{N}(A)$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $V^\perp = \mathcal{L}(A)$, donde $\{(1, -1, 2, 0), (0, 1, 1, 1)\}$ é uma base de $V^\perp$.

   (b) Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aos vectores $u_1 = (1, -1, 2, 0), u_2 = (0, 1, 1, 1)$ obtém-se a base ortogonal $\{v_1, v_2\}$ de $V^\perp$ onde $v_1 = u_1 = (1, -1, 2, 0)$. $v_2 = (-\frac{1}{6}, \frac{7}{6}, \frac{4}{6}, 1)$.

   (c) Seja $p = (-1, 1, 1, 2)$. Portanto, usando a base ortogonal obtida em b), temos $d(p, V) =$ $= ||P_{V^\perp}(p)|| = ||\frac{\langle p,v_1\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle}v_1 + \frac{\langle p,v_2\rangle}{\langle v_2,v_2\rangle}v_2|| = ||(0, 0, 0) + \frac{\langle p,v_2\rangle}{\langle v_2,v_2\rangle}v_2|| = \frac{|\langle p,v_1\rangle|}{||v_2||} = \frac{24}{\sqrt{102}}$.

4. Temos $\dim(\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})) = n^2$ e $\dim(\mathrm{U}) = n^2 - 1$. Uma base para U é

$$\{E_{ij} : i, j = 1, ..., n, i \neq j\} \cup \{E_{ii} : i = 2, ..., n\}$$

tais que as únicas entradas não nula de E_{ij} e de E_{ii} são dadas por: $(E_{ij})_{(i,j)} = 1$, $(E_{ii})_{(1,1)} = -1$ e $(E_{ii})_{(k,k)} = 1$ $(k \neq 1)$. Considere-se o produto interno em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ definido por $\langle X, Y\rangle = \text{tr}(XY^T)$. Assim, $\dim(\mathrm{U}^\perp) = 1$. Portanto a propriedade relativa à matriz A diz-nos que $A \in \mathrm{U}^\perp$, mas como $\{I\}$ é uma base de $\mathrm{U}^\perp$, podemos concluir que existe λ tal que $A = \lambda I$.
(Resolução alternativa: a hipótese implica que $\text{tr}(AE_{ij}) = 0$ e $\text{tr}(AE_{ii}) = 0$ usanda a base de U encontrada em cima. Agora conclua a tese calculando explicitamente $\text{tr}(AE_{ij})$ e $\text{tr}(AE_{ii})$.)