Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º Semestre 2015/2016
13 de Janeiro de 2016
Duração: 90 + 90 minutos

TESTE DE RECUPERAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR

MEAmbi - MEBiol

I (T1+T2 - 10 valores - 90 minutos)

1. Considere

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & 2 & 2\alpha & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{b}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2\alpha - 1 \\ \alpha + 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

   (a) (1.0) Discuta em termos de α a existência ou não de solução do sistema de equações lineares $A_\alpha \mathtt{x} = \mathrm{b}_\alpha$.

   (b) (1.0) Verifique se existe algum α tal que $\{(0, 1 - z + w, z, w) \in \mathbb{R}^4 : z, w \in \mathbb{R}\}$ seja o conjunto solução de $A_\alpha \mathtt{x} = \mathrm{b}_\alpha$.

   (c) (1.0) Determine uma base para $\mathcal{C}(A_0) \cap \mathcal{N}(A_0)$ e calcule $\dim(\mathcal{C}(A_0) + \mathcal{N}(A_0))$.

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) (1.0) Calcule $\det(A)$.

   (b) (1.0) Encontre a entrada $(4, 3)$ de A^{-1}.

   (c) (1.0) Sejam B e C matrizes tais $B + C = A$ e $B \neq 0$ simétrica. Calcule $\det\left(A^{-1}B + A^{-1}C^T\right)$.

3. Seja $V = \{p \in \mathcal{P}_2 : p(t) = p(1 - t),\ t \in \mathbb{R}\}$ onde $\mathcal{P}_2$ designa o espaço linear real dos polinómios de variável real t de grau ≤ 2.

   (a) (1.0) Determine as coordenadas de $1 - t + t^2$ numa base ordenada de V à sua escolha.

   (b) (1.0) Determine uma base $\mathcal{B}_2 = \{q_1, q_2\}$ de V tal que $S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ onde $\mathcal{B}_1 = \{-t + t^2,\ 1\}$.

   (c) (1.0) Encontre uma base de $\mathcal{P}_2$ que inclua os vectores da base $\{1,\ -t + t^2\}$ de V.

4. (1.0) Sejam V_1 e V_2 subespaços lineares de um espaço linear V de dimensão finita tais que

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1 \cap V_2) + 1.$$

   Prove que $V_1 \subseteq V_2$ ou $V_2 \subseteq V_1$.

II (T3 - 10 valores - 90 minutos)

1. Considere a matriz simétrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ e os vectores $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ e $u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (a) (1.0) Verifique que u_1, u_2 e u_3 são vectores próprios de A e determine as multiplicidades algébricas dos valores próprios associados.

   (b) (1.0) Determine uma matriz ortogonal Q e uma matriz diagonal D tais que $D = QAQ^T$.

   (c) (1.0) Decida se a seguinte forma quadrática é indefinida ou não:

$$Q(x, y, z) = x^2 + 6xy + 6xz + y^2 + 6yz + z^2, \quad \text{com } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

2. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to U$ dada por

$$T(x, y) = (x, x + y, 6x - 3y).$$

   onde $U = L(\{(1, 2, 3), (1, 3, 0)\})$.

   (a) (1.0) Verifique que T está bem definida (i.e., prove que $T(x, y) \in U$ para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$).

   (b) (1.0) Determine $M(T; Bc; \mathcal{B})$, onde Bc designa a base canónica de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B} = \{(1, 2, 3), (1, 3, 0)\}$ a base ordenada de U. Será T sobrejectiva?

   (c) (1.0) Resolva, em $\mathbb{R}^2$, a equação linear $T(x, y) = (1, 2, 3)$.

3. Considere $\mathbb{R}^4$ munido com o produto interno usual e $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + 2z = 0, y + z + w = 0\}$.

   (a) (1.0) Determine uma base de $V^\perp$.

   (b) (1.0) Determine uma base ortogonal de $V^\perp$.

   (c) (1.0) Calcule a distância entre $(-1, 1, 1, 2)$ e V.

4. (1.0) Seja $\mathrm{U} = \{X \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(X) = 0\}$ onde $\mathrm{tr}(X)$ designa o traço de X. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que a seguinte propriedade é verdadeira:

$$X \in \mathrm{U} \implies XA \in \mathrm{U}.$$

   Calcule $\dim(\mathrm{U})$ e prove que existe um escalar λ tal que $A = \lambda I$.

FIM