

Introdução à Análise Complexa
2º Mini-Teste - 25 de Outubro de 2024
LMAC

Duração: 45 minutos
Apresente os cálculos

1. Calcule

$$\int_{|z-2|=1} \frac{\log z}{(z+1)^2(z-2)^2} dz, \quad (7)$$

onde o logaritmo é o principal.

2. Calcule

$$\int_{\gamma} \left(-\frac{2}{z+1} + \frac{3}{z-1} \right) dz$$

para γ a curva parametrizada por

a) $t \mapsto 1 + e^{it}$ com $t \in [0, 2\pi]$, (3)

b) $t \mapsto 2e^{-it}$ com $t \in [0, 2\pi]$, (2)

c) $t \mapsto (2 \cos t, \sin(2t))$, com $t \in [0, 2\pi]$. (3)

3. Fixe-se $\epsilon > 0$ pequeno ($\epsilon < \frac{1}{2}$). Para cada $\theta > 0$, defina-se o intervalo

$$I_{\theta} := \left(\frac{1}{3} \left(1 - \epsilon + \frac{\theta}{2\pi} \right), \frac{1}{3} \left(1 + \epsilon + \frac{\theta}{2\pi} \right) \right).$$

Considere a região

$$S := \{re^{i\theta} \in \mathbb{C} : \theta \in (0, +\infty), r \in I_{\theta}\}$$

e a função $f : S \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$f(z) = \frac{1}{z}.$$

a) Esboce a região S . (1)

b) A função f é primitivável. Justifique. (2)

c) Designe-se por F a primitiva de f que se anula no ponto 1. Seja $re^{i\theta}$ um ponto de S , com $r \in I_{\theta}$. Calcule $F(re^{i\theta})$. Justifique. (2)

Introdução à Análise Complexa
2º Mini-Teste - 25 de Outubro de 2024
LMAC

Duração: 45 minutos
Apresente os cálculos

1. Calcule

$$\int_{|z-3|=1} \frac{\log z}{(z-1)^3(z-3)^2} dz, \quad (7)$$

onde o logaritmo é o principal.

2. Calcule

$$\int_{\gamma} \left(\frac{2}{z+i} - \frac{5}{z-i} \right) dz.$$

para γ a curva parametrizada por

a) $t \mapsto -i + e^{it}$ com $t \in [0, 2\pi]$, (3)

b) $t \mapsto 2e^{-it}$ com $t \in [0, 2\pi]$, (2)

c) $t \mapsto (\sin(2t), 2 \cos t)$ com $t \in [0, 2\pi]$. (3)

3. Fixe-se $\epsilon > 0$ pequeno ($\epsilon < \frac{1}{2}$). Para cada $\theta > 0$, defina-se o intervalo

$$I_{\theta} := \left(\frac{1}{4} \left(1 - \epsilon + \frac{\theta}{2\pi} \right), \frac{1}{4} \left(1 + \epsilon + \frac{\theta}{2\pi} \right) \right).$$

Considere a região

$$S := \{re^{i\theta} \in \mathbb{C} : \theta \in (0, +\infty), r \in I_{\theta}\}$$

e a função $f : S \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$f(z) = \frac{1}{z}.$$

a) Esboce a região S . (1)

b) A função f é primitivável. Justifique. (2)

c) Designe-se por F a primitiva de f que se anula no ponto 1. Seja $re^{i\theta}$ um ponto de S , com $r \in I_{\theta}$. Calcule $F(re^{i\theta})$. Justifique. (2)

Introdução à Análise Complexa
2º Mini-Teste - 25 de Outubro de 2024
LMAC

Duração: 45 minutos
Apresente os cálculos

1. Calcule

$$\int_{|z-2|=1} \frac{\log z}{(z+2)^2(z-2)^2} dz, \quad (7)$$

onde o logaritmo é o principal.

2. Calcule

$$\int_{\gamma} \left(-\frac{2}{z+1} + \frac{3}{z-1} \right) dz$$

para γ a curva parametrizada por

a) $t \mapsto -1 + e^{-it}$ com $t \in [0, 2\pi]$, (3)

b) $t \mapsto 2e^{it}$ com $t \in [0, 2\pi]$, (2)

c) $t \mapsto (2 \cos t, -\sin(2t))$, com $t \in [0, 2\pi]$. (3)

3. Fixe-se $\epsilon > 0$ pequeno ($\epsilon < \frac{1}{2}$). Para cada $\theta > 0$, defina-se o intervalo

$$I_{\theta} := \left(\frac{1}{5} \left(1 - \epsilon + \frac{\theta}{2\pi} \right), \frac{1}{5} \left(1 + \epsilon + \frac{\theta}{2\pi} \right) \right).$$

Considere a região

$$S := \{re^{i\theta} \in \mathbb{C} : \theta \in (0, +\infty), r \in I_{\theta}\}$$

e a função $f : S \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$f(z) = \frac{1}{z}.$$

a) Esboce a região S . (1)

b) A função f é primitivável. Justifique. (2)

c) Designe-se por F a primitiva de f que se anula no ponto 1. Seja $re^{i\theta}$ um ponto de S , com $r \in I_{\theta}$. Calcule $F(re^{i\theta})$. Justifique. (2)

Introdução à Análise Complexa
2º Mini-Teste - 25 de Outubro de 2024
LMAC

Duração: 45 minutos
Apresente os cálculos

1. Calcule

$$\int_{|z-3|=1} \frac{\log z}{(z-1)^2(z-3)^2} dz, \quad (7)$$

onde o logaritmo é o principal.

2. Calcule

$$\int_{\gamma} \left(\frac{2}{z+i} - \frac{5}{z-i} \right) dz.$$

para γ a curva parametrizada por

a) $t \mapsto i + e^{-it}$ com $t \in [0, 2\pi]$, (3)

b) $t \mapsto 2e^{it}$ com $t \in [0, 2\pi]$, (2)

c) $t \mapsto (-\sin(2t), 2\cos t)$ com $t \in [0, 2\pi]$. (3)

3. Fixe-se $\epsilon > 0$ pequeno ($\epsilon < \frac{1}{2}$). Para cada $\theta > 0$, defina-se o intervalo

$$I_{\theta} := \left(\frac{1}{6} \left(1 - \epsilon + \frac{\theta}{2\pi} \right), \frac{1}{6} \left(1 + \epsilon + \frac{\theta}{2\pi} \right) \right).$$

Considere a região

$$S := \{re^{i\theta} \in \mathbb{C} : \theta \in (0, +\infty), r \in I_{\theta}\}$$

e a função $f : S \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$f(z) = \frac{1}{z}.$$

a) Esboce a região S . (1)

b) A função f é primitivável. Justifique. (2)

c) Designe-se por F a primitiva de f que se anula no ponto 1. Seja $re^{i\theta}$ um ponto de S , com $r \in I_{\theta}$. Calcule $F(re^{i\theta})$. Justifique. (2)

Introdução à Análise Complexa
2º Mini-Teste - 25 de Outubro de 2024
LMAC

Resolução

1. $f(z) = \frac{\log z}{(z+1)^2}$, $a = 2$, $n = 1$, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$.

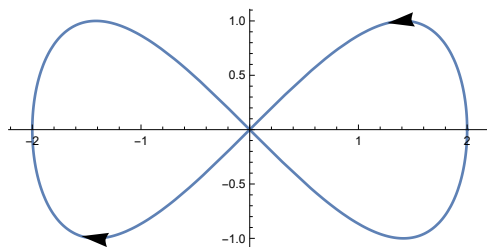
$$\begin{aligned} \int_{|z-2|=1} \frac{\log z}{(z+1)^2(z-2)^2} dz &= \frac{2\pi i}{1!} \frac{d}{dz} \frac{\log z}{(z+1)^2} \Big|_{z=2} \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{z(z+1)^2} - \frac{2 \log z}{(z+1)^3} \right) \Big|_{z=2} \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{18} - \frac{2 \ln 2}{27} \right) = \frac{\pi i}{9} \left(1 - \frac{4}{3} \ln 2 \right). \end{aligned}$$

2.

a) $3n(\gamma, 1) = 3$. Resposta: $6\pi i$.

b) $-2n(\gamma, -1) + 3n(\gamma, 1) = -2(-1) + 3(-1) = -1$. Resposta: $-2\pi i$.

c)

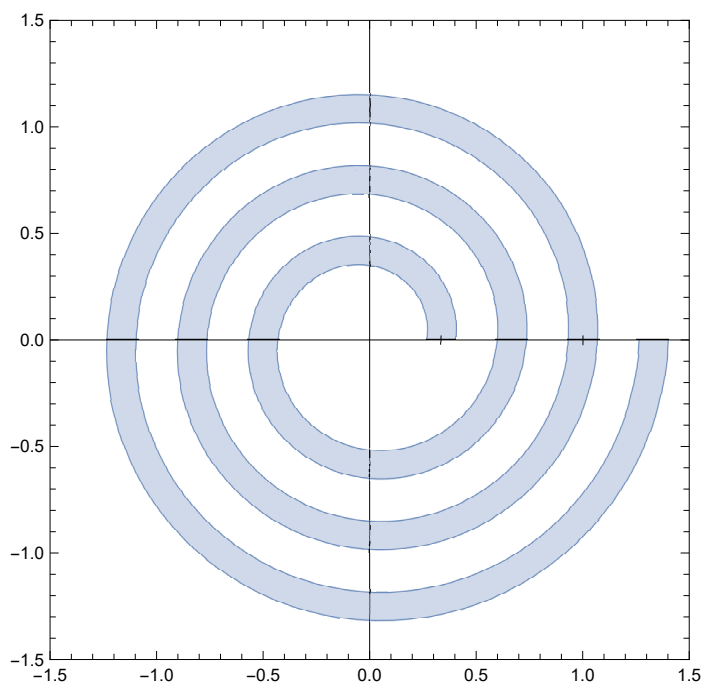


Esboço de γ .

$-2n(\gamma, -1) + 3n(\gamma, 1) = -2(-1) + 3(1) = 5$. Resposta: $10\pi i$.

3.

a)



Esboço da parte do conjunto S que corresponde a $\theta \in (0, 6\pi)$.

Encontram-se assinalados os pontos $(\frac{1}{3}, 0)$ e $(1, 0)$.

b) Como S é simplesmente conexo e f é holomorfa em S , o Teorema de Cauchy garante que o integral de f sobre qualquer curva fechada contida em S vale zero. Então, o Teorema Fundamental do Cálculo garante que f é a derivada de uma função holomorfa F .

c) Temos

$$F(re^{i\theta}) = \int_1^{re^{i\theta}} \frac{1}{\xi} d\xi$$

onde a curva que une 1 a $re^{i\theta}$ está contida em S . Note-se que $1 \in I_{4\pi}$. Parametrizemos a curva por

$$\begin{aligned} \xi(\gamma) &= \rho(\gamma)e^{i\gamma}, \text{ para } \gamma \in (4\pi, \theta), \\ \text{com } \rho(\gamma) &\in I_\gamma, \rho(4\pi) = 1, \rho(\theta) = r. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(re^{i\theta}) &= \int_{4\pi}^{\theta} \frac{\rho'(\gamma)e^{i\gamma} + i\rho(\gamma)e^{i\gamma}}{\rho(\gamma)e^{i\gamma}} d\gamma = \int_{4\pi}^{\theta} \left(\frac{\rho'(\gamma)}{\rho(\gamma)} + i \right) d\gamma \\ &= \ln(\rho(\theta)) + i(\theta - 4\pi) = \ln r + i(\theta - 4\pi). \end{aligned}$$

Introdução à Análise Complexa
2º Mini-Teste - 25 de Outubro de 2024
LMAC

Resolução

1. $f(z) = \frac{\log z}{(z-1)^3}$, $a = 3$, $n = 1$, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 1\}$.

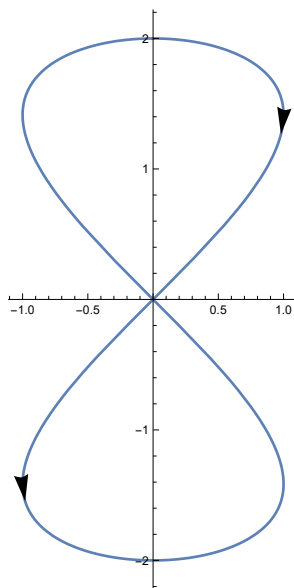
$$\begin{aligned} \int_{|z-3|=1} \frac{\log z}{(z-1)^3(z-3)^2} dz &= \frac{2\pi i}{1!} \frac{d}{dz} \frac{\log z}{(z-1)^3} \Big|_{z=3} \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{z(z-1)^3} - \frac{3 \log z}{(z-1)^4} \right) \Big|_{z=3} \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{24} - \frac{3 \ln 3}{16} \right) = \frac{\pi i}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} \ln 3 \right). \end{aligned}$$

2.

a) $2n(\gamma, -i) = 2$. Resposta: $4\pi i$.

b) $2n(\gamma, -i) - 5n(\gamma, i) = 2(-1) - 5(-1) = 3$. Resposta: $6\pi i$.

c)



Esboço de γ .

$$2n(\gamma, -i) - 5n(\gamma, i) = 2(1) - 5(-1) = 7. \text{ Resposta: } 14\pi i.$$

Introdução à Análise Complexa
2º Mini-Teste - 25 de Outubro de 2024
LMAC

Resolução

1. $f(z) = \frac{\log z}{(z+2)^2}$, $a = 2$, $n = 1$, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$.

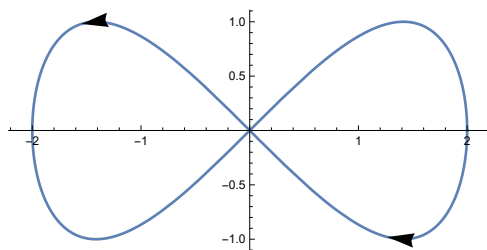
$$\begin{aligned} \int_{|z-2|=1} \frac{\log z}{(z+2)^2(z-2)^2} dz &= \frac{2\pi i}{1!} \frac{d}{dz} \frac{\log z}{(z+2)^2} \Big|_{z=2} \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{z(z+2)^2} - \frac{2 \log z}{(z+2)^3} \right) \Big|_{z=2} \\ &= \frac{\pi i}{16} (1 - \ln 2). \end{aligned}$$

2.

a) $-2n(\gamma, -1) = -2(-1) = 2$. Resposta: $4\pi i$.

b) $-2n(\gamma, -1) + 3n(\gamma, 1) = -2(1) + 3(1) = 1$. Resposta: $2\pi i$.

c)

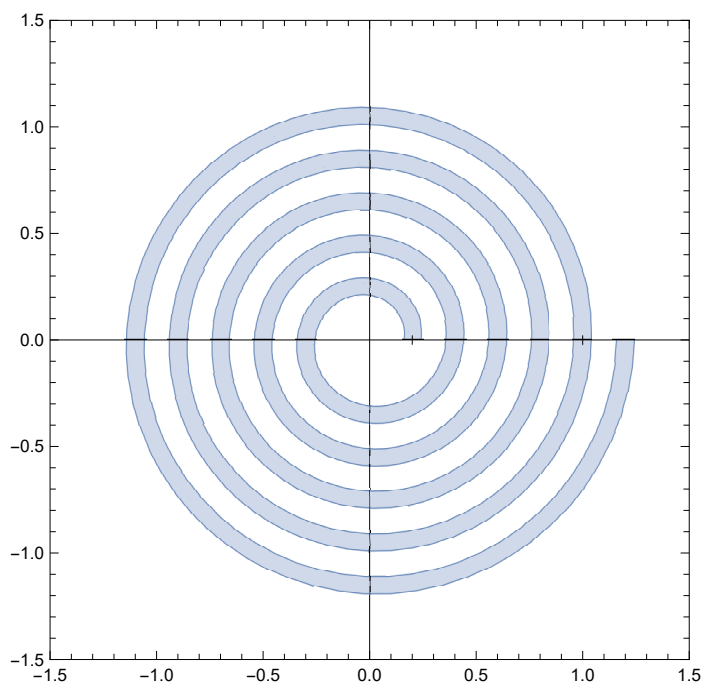


Esboço de γ .

$$-2n(\gamma, -1) + 3n(\gamma, 1) = -2(1) + 3(-1) = -5. \text{ Resposta: } -10\pi i.$$

3.

a)



Esboço da parte do conjunto S que corresponde a $\theta \in (0, 10\pi)$.

Encontram-se assinalados os pontos $(\frac{1}{5}, 0)$ e $(1, 0)$.

b) Como S é simplesmente conexo e f é holomorfa em S , o Teorema de Cauchy garante que o integral de f sobre qualquer curva fechada contida em S vale zero. Então, o Teorema Fundamental do Cálculo garante que f é a derivada de uma função holomorfa F .

c) Temos

$$F(re^{i\theta}) = \int_1^{re^{i\theta}} \frac{1}{\xi} d\xi$$

onde a curva que une 1 a $re^{i\theta}$ está contida em S . Note-se que $1 \in I_{8\pi}$. Parametrizemos a curva por

$$\begin{aligned} \xi(\gamma) &= \rho(\gamma)e^{i\gamma}, \text{ para } \gamma \in (8\pi, \theta), \\ \text{com } \rho(\gamma) &\in I_\gamma, \rho(8\pi) = 1, \rho(\theta) = r. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(re^{i\theta}) &= \int_{8\pi}^{\theta} \frac{\rho'(\gamma)e^{i\gamma} + i\rho(\gamma)e^{i\gamma}}{\rho(\gamma)e^{i\gamma}} d\gamma = \int_{8\pi}^{\theta} \left(\frac{\rho'(\gamma)}{\rho(\gamma)} + i \right) d\gamma \\ &= \ln(\rho(\theta)) + i(\theta - 8\pi) = \ln r + i(\theta - 8\pi). \end{aligned}$$

Introdução à Análise Complexa
2º Mini-Teste - 25 de Outubro de 2024
LMAC

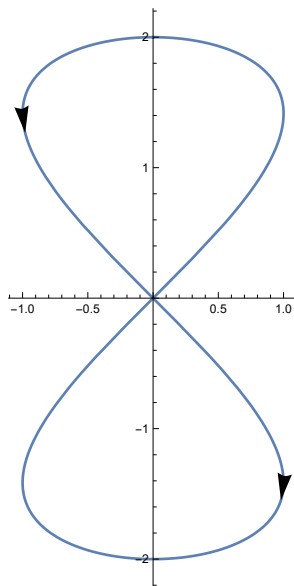
Resolução

1. $f(z) = \frac{\log z}{(z-1)^2}$, $a = 3$, $n = 1$, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 1\}$.

$$\begin{aligned} \int_{|z-3|=1} \frac{\log z}{(z-1)^2(z-3)^2} dz &= \frac{2\pi i}{1!} \frac{d}{dz} \frac{\log z}{(z-1)^2} \Big|_{z=3} \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{z(z-1)^2} - \frac{2 \log z}{(z-1)^3} \right) \Big|_{z=3} \\ &= \frac{\pi i}{6} (1 - 3 \ln 3). \end{aligned}$$

2.

- a) $-5n(\gamma, i) = -5(-1) = 5$. Resposta: $10\pi i$.
b) $2n(\gamma, -i) - 5n(\gamma, i) = 2(1) - 5(1) = -3$. Resposta: $-6\pi i$.
c)

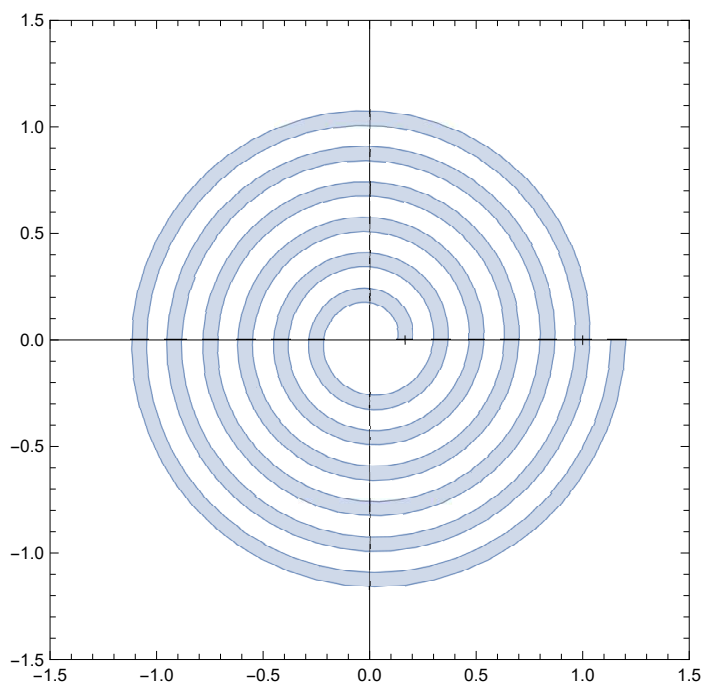


Esboço de γ .

$$2n(\gamma, -i) - 5n(\gamma, i) = 2(-1) - 5(1) = -7. \text{ Resposta: } -14\pi i.$$

3.

a)



Esboço da parte do conjunto S que corresponde a $\theta \in (0, 12\pi)$.

Encontram-se assinalados os pontos $(\frac{1}{6}, 0)$ e $(1, 0)$.

b) Como S é simplesmente conexo e f é holomorfa em S , o Teorema de Cauchy garante que o integral de f sobre qualquer curva fechada contida em S vale zero. Então, o Teorema Fundamental do Cálculo garante que f é a derivada de uma função holomorfa F .

c) Temos

$$F(re^{i\theta}) = \int_1^{re^{i\theta}} \frac{1}{\xi} d\xi$$

onde a curva que une 1 a $re^{i\theta}$ está contida em S . Note-se que $1 \in I_{10\pi}$. Parametrizemos a curva por

$$\begin{aligned} \xi(\gamma) &= \rho(\gamma)e^{i\gamma}, \text{ para } \gamma \in (10\pi, \theta) \quad , \\ \text{com } \rho(\gamma) &\in I_\gamma, \rho(10\pi) = 1, \rho(\theta) = r. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(re^{i\theta}) &= \int_{10\pi}^{\theta} \frac{\rho'(\gamma)e^{i\gamma} + i\rho(\gamma)e^{i\gamma}}{\rho(\gamma)e^{i\gamma}} d\gamma = \int_{10\pi}^{\theta} \left(\frac{\rho'(\gamma)}{\rho(\gamma)} + i \right) d\gamma \\ &= \ln(\rho(\theta)) + i(\theta - 10\pi) = \ln r + i(\theta - 10\pi). \end{aligned}$$