A

Introdução à Análise Complexa

2º Mini-Teste - 27 de Outubro de 2023

LMAC

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Usando a definição de integral, calcule (6)

$$\int_{|z|=r} \log z \, dz,$$

onde a curva é descrita em sentido directo e o logaritmo é o principal.

2. Calcule (9)

$$\int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{\log(1-z)}{(z^2+1)^2} \, dz,$$

em que a circunferência é descrita no sentido directo e o logaritmo é o principal. Simplifique o resultado.

3. Seja f holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, e $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z-a| > r > 0$. Suponha que

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-a|=r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi, \qquad (\star)$$

onde a circunferência é descrita no sentido directo.

a) Desenvolvendo $-\frac{1}{\xi-z}$ em série de Laurent em torno do ponto a, tal como feito na aula, obtenha a série de Laurent de f em torno de a. (3)

b) Mostre que se (2)

$$|f(z)| \leq \frac{C}{|z-a|}$$

para um $C > 0$, então f verifica $(\star)$.

B

Introdução à Análise Complexa

2º Mini-Teste - 27 de Outubro de 2023

LMAC

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Usando a definição de integral, calcule (6)

$$\int_{|z|=r} \log \overline{z}\, dz,$$

onde a curva é descrita em sentido directo e o logaritmo é o principal.

2. Calcule (9)

$$\int_{|z+i|=\frac{1}{2}} \frac{\log(1+z)}{(z^2+1)^2}\, dz,$$

em que a circunferência é descrita no sentido directo e o logaritmo é o principal. Simplifique o resultado.

3. Seja f holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, e $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z-a| > r > 0$. Suponha que

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-a|=r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi, \qquad (\star)$$

onde a circunferência é descrita no sentido directo.

a) Desenvolvendo $-\frac{1}{\xi-z}$ em série de Laurent em torno do ponto a, tal como feito na aula, obtenha a série de Laurent de f em torno de a. (3)

b) Mostre que se (2)

$$|f(z)| \leq \frac{C}{|z-a|}$$

para um $C > 0$, então f verifica $(\star)$.

A

Introdução à Análise Complexa

2º Mini-Teste - 27 de Outubro de 2023

LMAC

Resolução

1. Usando a parametrização $z : (-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$, definida por $z(\theta) = re^{i\theta}$, vem

$$\begin{aligned}\int_{|z|=r} \log z \, dz &= \int_{-\pi}^{\pi} \log(z(\theta)) z'(\theta)\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} (\ln r + i\theta) ire^{i\theta}\, d\theta \\ &= -r \int_{-\pi}^{\pi} \theta e^{i\theta}\, d\theta = ir\theta e^{i\theta}\Big|_{-\pi}^{\pi} - ir \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta}\, d\theta = -2i\pi r.\end{aligned}$$

2. Aplica-se a fórmula integral de Cauchy,

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a),$$

com $f(z) = \frac{\log(1-z)}{(z+i)^2}$, $a = i$, $n = 1$ e $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$. Usando o facto de

$$\log(1-i) = \log\left(\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{1}{2}\ln 2 - i\frac{\pi}{4},$$

obtém-se

$$\begin{aligned}\int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{\log(1-z)}{(z^2+1)^2}\, dz &= \int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{\log(1-z)}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}\, dz = 2\pi i \frac{d}{dz} \frac{\log(1-z)}{(z+i)^2}\Big|_{z=i} \\ &= 2\pi i \left(-\frac{1}{1-z}\frac{1}{(z+i)^2} - \frac{2\log(1-z)}{(z+i)^3}\right)\Big|_{z=i} \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{4}\frac{1+i}{2} - \frac{i}{4}\left(\frac{1}{2}\ln 2 - i\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{8}(1+i) - \frac{\pi}{16} - \frac{i}{8}\ln 2\right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{2-\pi}{16} + \frac{i}{8}(1-\ln 2)\right) \\ &= \frac{\pi}{4}(\ln 2 - 1) + \frac{\pi i}{8}(2-\pi).\end{aligned}$$

a) Se $|\xi - a| = r < |z-a|$, então

$$-\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(z-a)-(\xi-a)} = \frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{\xi-a}{z-a}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\xi-a)^n}{(z-a)^{n+1}}.$$

Esta igualdade implica que

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=r}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\xi)(\xi-a)^n}{(z-a)^{n+1}}\,d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=r}f(\xi)(\xi-a)^n\,d\xi\right)\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{(z-a)^{n+1}}, \end{aligned}$$

onde

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=r}f(\xi)(\xi-a)^n\,d\xi.$$

b) De acordo com a fórmula integral de Cauchy, se $r < |z-a| < R$, então

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=R}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=r}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi. \qquad (\star\star)$$

Se $|f(\xi)| \leq \frac{C}{|\xi-a|}$, então

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=R}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi-a|=R}\frac{C}{|\xi-a|}\frac{1}{|\xi-z|}\,|d\xi| \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{C}{R}\int_{|\xi-a|=R}\frac{1}{|(\xi-a)-(z-a)|}\,|d\xi| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\frac{C}{R}\frac{1}{R-|z-a|}2\pi R \\ &= \frac{C}{R-|z-a|} \longrightarrow 0, \text{ quando } R\to+\infty. \end{aligned}$$

Tomando o limite de ambos os membros de $(\star\star)$ quando $R \to +\infty$, conclui-se que $(\star)$ se verifica.

Outro método. Tem-se

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$$

com
$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz.$$
Logo, se $|f(z)| \leq \frac{C}{|z-a|}$, então
$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{C}{\rho^{n+2}}2\pi\rho = \frac{C}{\rho^{n+1}}.$$
Fazendo ρ tender para $+\infty$, conclui-se que $a_n = 0$ para $n \geq 0$. Fazendo ρ tender para 0, conclui-se que $a_n = 0$ para $n \leq -2$. Assim,
$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-a}.$$
Isto implica
$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=r} \frac{a_{-1}}{(\xi-a)(\xi-z)}\,d\xi \\ &= -\left.\frac{a_{-1}}{\xi - z}\right|_{\xi=a} = -\frac{a_{-1}}{a-z} = \frac{a_{-1}}{z-a} \\ &= f(z). \end{aligned}$$

Outro método. A função $g(z) = (z-a)f(z)$ tem uma singularidade removível em a porque $\lim_{z\to a}(z-a)g(z) = 0$. Como o módulo de g é limitado por C, pelo Teorema de Liouville, o prolongamento de g a a é constante, digamos igual a c. Logo, $f(z) = \frac{c}{z-a}$. A partir deste ponto o argumento prossegue como no método anterior.

B

Introdução à Análise Complexa

2º Mini-Teste - 27 de Outubro de 2023

LMAC

Resolução

1. Usando a parametrização $z : (-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$, definida por $z(\theta) = re^{i\theta}$, vem

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=r} \log \overline{z}\, dz &= \int_{-\pi}^{\pi} \log(\overline{z}(\theta)) z'(\theta)\, d\theta \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} (\ln r - i\theta) ire^{i\theta}\, d\theta \\
&= r \int_{-\pi}^{\pi} \theta e^{i\theta}\, d\theta \;=\; -ir\theta e^{i\theta}\Big|_{-\pi}^{\pi} + ir \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta}\, d\theta \;=\; 2i\pi r.
\end{aligned}$$

2. Aplica-se a fórmula integral de Cauchy,

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a),$$

com $f(z) = \frac{\log(1+z)}{(z-i)^2}$, $a = -i$, $n = 1$ e $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Im z < 0\}$. Usando o facto de

$$\log(1-i) = \log\left(\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{1}{2}\ln 2 - i\frac{\pi}{4},$$

obtém-se

$$\begin{aligned}
\int_{|z+i|=\frac{1}{2}} \frac{\log(1+z)}{(z^2+1)^2}\, dz &= \int_{|z+i|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{\log(1+z)}{(z-i)^2}}{(z+i)^2}\, dz \;=\; 2\pi i \frac{d}{dz} \frac{\log(1+z)}{(z-i)^2}\Bigg|_{z=-i} \\
&= 2\pi i \left(\frac{1}{1+z} \frac{1}{(z-i)^2} - \frac{2\log(1+z)}{(z-i)^3} \right)\Bigg|_{z=-i} \\
&= 2\pi i \left(-\frac{1}{4}\frac{1+i}{2} + \frac{i}{4}\left(\frac{1}{2}\ln 2 - i\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= 2\pi i \left(-\frac{1}{8}(1+i) + \frac{\pi}{16} + \frac{i}{8}\ln 2 \right) \\
&= 2\pi i \left(\frac{\pi - 2}{16} + \frac{i}{8}(\ln 2 - 1) \right) \\
&= \frac{\pi}{4}(1 - \ln 2) + \frac{\pi i}{8}(\pi - 2).
\end{aligned}$$

a) Se $|\xi - a| = r < |z-a|$, então

$$-\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(z-a)-(\xi-a)} = \frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{\xi-a}{z-a}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\xi-a)^n}{(z-a)^{n+1}}.$$

Esta igualdade implica que

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=r}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\xi)(\xi-a)^n}{(z-a)^{n+1}}\,d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=r} f(\xi)(\xi-a)^n\,d\xi\right)\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{(z-a)^{n+1}}, \end{aligned}$$

onde

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=r} f(\xi)(\xi-a)^n\,d\xi.$$

b) De acordo com a fórmula integral de Cauchy, se $r < |z-a| < R$, então

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=R}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=r}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi. \qquad (\star\star)$$

Se $|f(\xi)| \leq \frac{C}{|\xi-a|}$, então

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=R}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi-a|=R}\frac{C}{|\xi-a|}\frac{1}{|\xi-z|}\,|d\xi| \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{C}{R}\int_{|\xi-a|=R}\frac{1}{|(\xi-a)-(z-a)|}\,|d\xi| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\frac{C}{R}\frac{1}{R-|z-a|}2\pi R \\ &= \frac{C}{R-|z-a|} \longrightarrow 0, \text{ quando } R \to +\infty. \end{aligned}$$

Tomando o limite de ambos os membros de $(\star\star)$ quando $R \to +\infty$, conclui-se que $(\star)$ se verifica.

Outro método. Tem-se

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

com

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz.$$

Logo, se $|f(z)| \leq \frac{C}{|z-a|}$, então

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{C}{\rho^{n+2}} 2\pi\rho = \frac{C}{\rho^{n+1}}.$$

Fazendo ρ tender para $+\infty$, conclui-se que $a_n = 0$ para $n \geq 0$. Fazendo ρ tender para 0, conclui-se que $a_n = 0$ para $n \leq -2$. Assim,

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-a}.$$

Isto implica

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=r} \frac{a_{-1}}{(\xi-a)(\xi-z)}\, d\xi \\ &= -\left.\frac{a_{-1}}{\xi - z}\right|_{\xi=a} = -\frac{a_{-1}}{a-z} = \frac{a_{-1}}{z-a} \\ &= f(z). \end{aligned}$$

Outro método. A função $g(z) = (z-a)f(z)$ tem uma singularidade removível em a porque $\lim_{z\to a}(z-a)g(z) = 0$. Como o módulo de g é limitado por C, pelo Teorema de Liouville, o prolongamento de g a a é constante, digamos igual a c. Logo, $f(z) = \frac{c}{z-a}$. A partir deste ponto o argumento prossegue como no método anterior.