A

Introdução à Análise Complexa

2º Mini-Teste - 4 de Novembro de 2022

LMAC

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Justificando, determine

a) (4)

$$\int_L \overline{z}^2\, dz,$$

onde L é o segmento de recta que vai de 1 a i;

b) (4)

$$\oint_{\left|z+\frac{\pi}{2}\right|=\pi} \frac{e^{2iz}}{\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^4}\, dz;$$

c) (4)

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2(z+2)^3}\, dz;$$

d) (2)

$$\frac{d}{dz}\int_0^{z^4} \sin(e^w)\, dw,$$

após explicar o motivo pelo qual o integral está bem definido.

2. Sejam k e l funções holomorfas no ponto a tais que $k(a) = l(a) = 0$.

a) Prove que, se $l'(a) \neq 0$, então (2)

$$\lim_{z\to a} \frac{k(z)}{l(z)} = \frac{k'(a)}{l'(a)}.$$

Nota. No caso $k'(a) = l'(a) = 0$ pode provar-se que, se $l''(a) \neq 0$, então

$$\lim_{z\to a} \frac{k(z)}{l(z)} = \frac{k''(a)}{l''(a)}.$$

Seja f uma função inteira satisfazendo $f(0) = 0$. Seja ainda $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a função contínua no ponto zero tal que

$$g(z) = \frac{f(z)}{z}$$

para $z \neq 0$.

b) Indique o valor de $g(0)$. A função g é inteira? Justifique. (2)

c) Suponha que $|f(z)| \leq |z|$ para todo o $z \in \mathbb{C}$. O que pode concluir? (2)

1.

a) $z(t) = 1 + t(i-1)$ para $t \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \overline{z(t)}^2 z'(t)\,dt &= \int_0^1 (1-t(1+i))^2(i-1)\,dt \\ &= (i-1)\frac{(1-t(1+i))^3}{-3(1+i)}\bigg|_0^1 = \frac{1+i}{3}.\end{aligned}$$

b) Aplicando a fórmula integral de Cauchy com $\Omega = \mathbb{C}$, $f(z) = e^{2iz}$, $a = -\frac{\pi}{2}$, $n = 3$, vem

$$\oint_{\left|z+\frac{\pi}{2}\right|=\pi} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = 2\pi i \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 2\pi i\,\frac{1}{3!}\frac{d^3}{dz^3}e^{2iz}\bigg|_{z=-\frac{\pi}{2}} = -\frac{8\pi}{3}.$$

c) Aplicando a fórmula integral de Cauchy com $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > -2\}$, $f(z) = \frac{1}{(z+2)^3}$, $a = 0$, $n = 1$, vem

$$\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = 2\pi i \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 2\pi i\,\frac{d}{dz}\frac{1}{(z+2)^3}\bigg|_{z=0} = -\frac{3\pi i}{8}.$$

d) A função integranda é inteira. Pelo Teorema de Cauchy o integral depende apenas dos pontos inicial e final da curva. Portanto, o integral está bem definido. Seja $\eta = z^4$. Usando o Teorema Fundamental do Cálculo e a derivada da função composta, obtém-se

$$\frac{d}{dz}\int_0^\eta \sin(e^w)\,dw = \frac{d}{d\eta}\int_0^\eta \sin(e^w)\,dw\,\frac{d\eta}{dz} = \sin(e^\eta)4z^3 = 4z^3\sin(e^{z^4}).$$

2.

a) Tendo em atenção que $k(a) = l(a) = 0$, tem-se

$$\lim_{z\to a}\frac{k(z)}{l(z)} = \lim_{z\to a}\frac{k(z)-k(a)}{l(z)-l(a)} = \lim_{z\to a}\frac{\frac{k(z)-k(a)}{z-a}}{\frac{l(z)-l(a)}{z-a}} = \frac{\lim_{z\to a}\frac{k(z)-k(a)}{z-a}}{\lim_{z\to a}\frac{l(z)-l(a)}{z-a}} = \frac{k'(a)}{l'(a)}.$$

b) A função g é definida por

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{se } z \neq 0, \\ f'(0) & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

A função g é diferenciável em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ porque é o quociente de funções diferenciáveis em que o denominador não se anula. Provemos a diferenciabilidade de g em 0:

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{z\to 0} \frac{\frac{f(z)}{z} - f'(0)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f'(0)z}{z^2} \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{f''(z)}{2} = \frac{f''(0)}{2}. \end{aligned}$$

Usámos a *Nota* do enunciado. Fica assim provado que g é inteira.

c) Como g é inteira e limitada (por 1), pelo Teorema de Liouville, g é constante, digamos $g \equiv c$; tem-se $|c| \leq 1$. Conclui-se que $f(z) \equiv cz$, onde $|c| \leq 1$.

B

Introdução à Análise Complexa

2º Mini-Teste - 4 de Novembro de 2022

LMAC

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Justificando, determine

a) (4)

$$\int_L \overline{z}^2 \, dz$$

onde L é o segmento de recta que vai de -1 a i;

b) (4)

$$\oint_{\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=\pi} \frac{e^{3iz}}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3} \, dz;$$

c) (4)

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{(z+1)^2(z+3)^3} \, dz;$$

d) (2)

$$\frac{d}{dz} \int_0^{e^{2z}} \sin(w^4) \, dw,$$

após explicar o motivo pelo qual o integral está bem definido.

2. Sejam k e l funções holomorfas no ponto a tais que $k(a) = l(a) = 0$.

a) Prove que, se $l'(a) \neq 0$, então (2)

$$\lim_{z \to a} \frac{k(z)}{l(z)} = \frac{k'(a)}{l'(a)}.$$

Nota. No caso $k'(a) = l'(a) = 0$, pode provar-se que, se $l''(a) \neq 0$, então

$$\lim_{z \to a} \frac{k(z)}{l(z)} = \frac{k''(a)}{l''(a)}.$$

Seja f uma função inteira satisfazendo $f(0) = 0$. Seja ainda $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a função contínua no ponto zero tal que

$$g(z) = \frac{f(z)}{z}$$

para $z \neq 0$.

b) Indique o valor de $g(0)$. A função g é inteira? Justifique. (2)

c) Suponha que $|f(z)| \leq |z|$ para todo o $z \in \mathbb{C}$. O que pode concluir? (2)

1.

a) $z(t) = -1 + t(i+1)$ para $t \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \overline{z(t)}^2 z'(t)\, dt &= \int_0^1 (-1+t(1-i))^2(1+i)\, dt \\ &= (1+i)\frac{(-1+t(1-i))^3}{3(1-i)}\bigg|_0^1 = \frac{-1+i}{3}. \end{aligned}$$

b) Aplicando a fórmula integral de Cauchy com $\Omega = \mathbb{C}$, $f(z) = e^{3iz}$, $a = \frac{\pi}{2}$, $n = 2$, vem

$$\oint_{|z-\frac{\pi}{2}|=\pi} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz = 2\pi i \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 2\pi i\, \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2} e^{3iz}\bigg|_{z=\frac{\pi}{2}} = -9\pi.$$

c) Aplicando a fórmula integral de Cauchy com $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > -3\}$, $f(z) = \frac{1}{(z+3)^3}$, $a = -1$, $n = 1$, vem

$$\oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz = 2\pi i \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 2\pi i\, \frac{d}{dz}\frac{1}{(z+3)^3}\bigg|_{z=-1} = -\frac{3\pi i}{8}.$$

d) A função integranda é inteira. Pelo Teorema de Cauchy o integral depende apenas dos pontos inicial e final da curva. Portanto, o integral está bem definido. Seja $\eta = e^{2z}$. Usando o Teorema Fundamental do Cálculo e a derivada da função composta, obtém-se

$$\frac{d}{dz}\int_0^\eta \sin(w^4)\, dw = \frac{d}{d\eta}\int_0^\eta \sin(w^4)\, dw\, \frac{d\eta}{dz} = \sin(\eta^4)2e^{2z} = 2e^{2z}\sin(e^{8z}).$$

2.

a) Tendo em atenção que $k(a) = l(a) = 0$, tem-se

$$\lim_{z\to a}\frac{k(z)}{l(z)} = \lim_{z\to a}\frac{k(z)-k(a)}{l(z)-l(a)} = \lim_{z\to a}\frac{\frac{k(z)-k(a)}{z-a}}{\frac{l(z)-l(a)}{z-a}} = \frac{\lim_{z\to a}\frac{k(z)-k(a)}{z-a}}{\lim_{z\to a}\frac{l(z)-l(a)}{z-a}} = \frac{k'(a)}{l'(a)}.$$

b) A função g é definida por

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{se } z \neq 0, \\ f'(0) & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

A função g é diferenciável em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ porque é o quociente de funções diferenciáveis em que o denominador não se anula. Provemos a diferenciabilidade de g em 0:

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{z\to 0} \frac{\frac{f(z)}{z} - f'(0)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f'(0)z}{z^2} \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{f''(z)}{2} = \frac{f''(0)}{2}. \end{aligned}$$

Usámos a *Nota* do enunciado. Fica assim provado que g é inteira.

c) Como g é inteira e limitada (por 1), pelo Teorema de Liouville, g é constante, digamos $g \equiv c$; tem-se $|c| \leq 1$. Conclui-se que $f(z) \equiv cz$, onde $|c| \leq 1$.