A

Introdução à Análise Complexa

1º Mini-Teste - 11 de Outubro de 2024

LMAC

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Esboce a região $\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z - (-1+i)| < 1\}$. Esboce e defina analiticamente a imagem de $\mathcal{S}$ por $z \mapsto \frac{1}{z}$. (6)

2. Determine, justificando, para que valores de $\alpha \in \mathbb{C}$ a função (8)

$$f(x+iy) = e^{\alpha(2x+2y)} e^{i(x-y)}$$

é diferenciável. Para esses valores de α, escreva f e a sua derivada de f em termos de z.

3. Considere o logaritmo

$$f(re^{i\theta}) = \log(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta, \quad r > 0,\ \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[.$$

a) Qual o conjunto de diferenciabilidade de f? Justifique. Calcule a derivada de f. (2)

b) Seja $re^{i\theta}$ um ponto onde f é diferenciável e considere $v = e^{i\varphi}$. Calcule a derivada de f no ponto $re^{i\theta}$ na direcção de v. (2)

c) Seja $re^{i\theta}$ um ponto do domínio de f em que f não é diferenciável. Para que valores de φ existe a derivada de f no ponto $re^{i\theta}$ na direcção de $e^{i\varphi}$? Qual é o valor dessa derivada direccional? (2)

B

Introdução à Análise Complexa

1º Mini-Teste - 11 de Outubro de 2024

LMAC

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Esboce a região $\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z - (1 - i)| > 1\}$. Esboce e defina analiticamente a imagem de $\mathcal{S}$ por $z \mapsto \frac{1}{z}$. (6)

2. Determine, justificando, para que valores de $\alpha \in \mathbb{C}$ a função (8)

$$f(x + iy) = e^{\alpha(x-y)} e^{2i(x+y)}$$

é diferenciável. Para esses valores de α, escreva f e a sua derivada de f em termos de z.

3. Considere o logaritmo

$$f(re^{i\theta}) = \log(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta, \quad r > 0,\ \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right].$$

a) Qual o conjunto de diferenciabilidade de f? Justifique. Calcule a derivada de f. (2)

b) Seja $re^{i\theta}$ um ponto onde f é diferenciável e considere $v = e^{i\varphi}$. Calcule a derivada de f no ponto $re^{i\theta}$ na direcção de v. (2)

c) Seja $re^{i\theta}$ um ponto do domínio de f em que f não é diferenciável. Para que valores de φ existe a derivada de f no ponto $re^{i\theta}$ na direcção de $e^{i\varphi}$? Qual é o valor dessa derivada direccional? (2)

A

Introdução à Análise Complexa

1º Mini-Teste - 11 de Outubro de 2024

LMAC

Resolução

1. A imagem da circunferência é uma circunferência porque a original não passa na origem. A imagem de -1 é -1, e a imagem de i é $-i$. Como a circunferência original é tangente ao eixo real e ao eixo imaginário, e estes eixos são transformados neles próprios, a circunferência imagem tem que ser tangente aos eixos coordenados. Complexos com módulo muito grande não pertencem a $\mathcal{S}$, pelo complexos com módulo muito perto de zero não pertencem à imagem de $\mathcal{S}$. Portanto, a imagem de $\mathcal{S}$ é $\{z \in \mathbb{C} : |z - (-1 - i)| < 1\}$.

2. A função f tem derivadas parciais contínuas, pelo que é $\mathbb{R}$-diferenciável em $\mathbb{C}$. A equação de Cauchy-Riemann,

$$\begin{aligned} f_x = -if_y \quad &\Leftrightarrow \quad (2\alpha + i)f = -i(2\alpha - i)f = (-1 - 2i\alpha)f \\ &\Leftrightarrow \quad 2\alpha + i = -1 - 2i\alpha \\ &\Leftrightarrow \quad 2(1 + i)\alpha = -(1 + i), \end{aligned}$$

verifica-se sse $\alpha = -\frac{1}{2}$. Portanto, f é difenciável sse $\alpha = -\frac{1}{2}$. Para este valor de α, $f(x + iy) = e^{-x-y}e^{i(x-y)} = e^{-z+iz} = e^{(-1+i)z}$. Logo, tem-se $f'(z) = (-1 + i)e^{(-1+i)z}$.

3.

a) Seja $\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} : \Re z = 0 \text{ e } \Im z \leq 0\}$. A função f não está definida em 0 e é descontínua no eixo imaginário negativo. A função f é diferenciável em $\mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$ porque nesse conjunto tem derivadas parciais contínuas e satisfaz a forma polar da equação de Cauchy-Riemann, $f_r = -\frac{i}{r} f_\theta$, porque $\frac{1}{r} = -\frac{i}{r} \cdot i$. $f'(re^{i\theta}) = e^{-i\theta}\frac{\partial f}{\partial r}(re^{i\theta}) = \frac{1}{re^{i\theta}}$.

b) A derivada de f no ponto $re^{i\theta}$ na direcção de $e^{i\varphi}$ é igual a

$$\frac{d}{dt} f\left(re^{i\theta} + te^{i\varphi}\right)\bigg|_{t=0} = f'\left(re^{i\theta}\right)e^{i\varphi} = \frac{1}{re^{i\theta}}e^{i\varphi} = \frac{e^{i(\varphi-\theta)}}{r}.$$

c) Pontos $re^{i\theta}$ do domínio de f em que f não é diferenciável têm $\theta = \frac{3\pi}{2}$. Então, a derivada de f no ponto $re^{i\theta}$ na direcção de $e^{i\varphi}$ existe sse $\varphi = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

- Se $\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, a derivada direccional é a derivada $\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{r}$.
- Se $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, a derivada direccional é a derivada $-\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{1}{r}$.
- Se $\varphi \neq \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ a derivada na direcção de $e^{i\varphi}$ não existe porque a função $t \mapsto f(-ir + te^{i\varphi})$ é descontínua em $t = 0$.

B

Introdução à Análise Complexa

1º Mini-Teste - 11 de Outubro de 2024

LMAC

Resolução

1. A imagem da circunferência é uma circunferência porque a original não passa na origem. A imagem de 1 é 1, e a imagem de $-i$ é i. Como a circunferência original é tangente ao eixo real e ao eixo imaginário, e estes eixos são transformados neles próprios, a circunferência imagem tem que ser tangente aos eixos coordenados. Complexos com módulo muito grande pertencem a $\mathcal{S}$, pelo que complexos com módulo muito perto de zero pertencem à imagem de $\mathcal{S}$. Portanto, a imagem de $\mathcal{S}$ é $\{z \in \mathbb{C} : |z - (1+i)| > 1\}$.

2. A função f tem derivadas parciais contínuas, pelo que é $\mathbb{R}$-diferenciável em $\mathbb{C}$. A equação de Cauchy-Riemann,

$$\begin{aligned} f_x = -if_y \quad &\Leftrightarrow \quad (\alpha + 2i)f = -i(-\alpha + 2i)f = (2 + i\alpha)f \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha + 2i = 2 + i\alpha \\ &\Leftrightarrow \quad (1-i)\alpha = 2(1-i), \end{aligned}$$

verifica-se sse $\alpha = 2$. Portanto, f é difenciável sse $\alpha = 2$. Para este valor de α, $f(x+iy) = e^{2x-2y}e^{2i(x+y)} = e^{2z+2iz} = e^{2(1+i)z}$. Logo, tem-se $f'(z) = 2(1+i)e^{2(1+i)z}$.

3.

a) Seja $\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} : \Re z = 0 \text{ e } \Im z \geq 0\}$. A função f não está definida em 0 e é descontínua no eixo imaginário negativo. A função f é diferenciável em $\mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$ porque nesse conjunto tem derivadas parciais contínuas e satisfaz a forma polar da equação de Cauchy-Riemann, $f_r = -\frac{i}{r}f_\theta$, porque $\frac{1}{r} = -\frac{i}{r} \cdot i$. $f'(re^{i\theta}) = e^{-i\theta}\frac{\partial f}{\partial r}(re^{i\theta}) = \frac{1}{re^{i\theta}}$.

b) A derivada de f no ponto $re^{i\theta}$ na direcção de $e^{i\varphi}$ é igual a

$$\frac{d}{dt}f\left(re^{i\theta} + te^{i\varphi}\right)\bigg|_{t=0} = f'\left(re^{i\theta}\right)e^{i\varphi} = \frac{1}{re^{i\theta}}e^{i\varphi} = \frac{e^{i(\varphi-\theta)}}{r}.$$

c) Pontos $re^{i\theta}$ do domínio de f em que f não é diferenciável têm $\theta = \frac{5\pi}{2}$. Então, a derivada de f no ponto $re^{i\theta}$ na direcção de $e^{i\varphi}$ existe sse $\varphi = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

- Se $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, a derivada direccional é a derivada $\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{r}$.
- Se $\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, a derivada direccional é a derivada $-\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{1}{r}$.
- Se $\varphi \neq \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ a derivada na direcção de $e^{i\varphi}$ não existe porque a função $t \mapsto f(ir + te^{i\varphi})$ é descontínua em $t = 0$.