A

Introdução à Análise Complexa

1º Mini-Teste - 13 de Outubro de 2023

LMAC

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Estude a diferenciabilidade da função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por (6)

$$f(x+iy) = e^y \sin x + ie^{-y} \cos x,$$

e calcule a sua derivada nos pontos onde é diferenciável.

2. Determine a imagem de $\{z \in \mathbb{C} : \Re z > -1 \text{ e } \Im z < 1\}$ por $z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$. (6)

3. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, definida por

$$f(re^{i\theta}) = (\ln r)^2 - i\theta^2, \quad \text{para } \theta \in]-\pi, \pi].$$

a) Estude a diferenciabilidade de f e calcule a sua derivada nos pontos onde é diferenciável. (5)

b) Estude a invertibilidade local de f. Identifique os conjuntos máximos abertos conexos em que f é injectiva. Identifique também os pontos do contradomínio de f que têm precisamente duas pré-imagens e os pontos do contradomínio de f que têm precisamente uma pré-imagem, caso existam. (3)

B

Introdução à Análise Complexa

1º Mini-Teste - 13 de Outubro de 2023

LMAC

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Estude a diferenciabilidade da função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por (6)

$$f(x+iy) = e^{-y}\sin x + ie^{y}\cos x,$$

e calcule a sua derivada nos pontos onde é diferenciável.

2. Determine a imagem de $\{z \in \mathbb{C} : \Re z < 1 \text{ e } \Im z > -1\}$ por $z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$. (6)

3. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, definida por

$$f(re^{i\theta}) = (\ln r)^4 + i\theta^4, \quad \text{para } \theta \in]-\pi, \pi].$$

a) Estude a diferenciabilidade de f e calcule a sua derivada nos pontos onde é diferenciável. (5)

b) Estude a invertibilidade local de f. Identifique os conjuntos máximos abertos conexos em que f é injectiva. Identifique também os pontos do contradomínio de f que têm precisamente duas pré-imagens e os pontos do contradomínio de f que têm precisamente uma pré-imagem, caso existam. (3)

A

Introdução à Análise Complexa

1º Mini-Teste - 13 de Outubro de 2023

LMAC

Resolução

1. As derivadas parciais de f são

$$\begin{aligned} f_x &= e^y \cos x - ie^{-y} \sin x, \\ f_y &= e^y \sin x - ie^{-y} \cos x, \\ -if_y &= -e^{-y} \cos x - ie^y \sin x. \end{aligned}$$

Como são contínuas, f é $\mathbb{R}$-diferenciável. A equação de Cauchy-Riemann é satisfeita quando

$$f_x = -if_y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos x = 0, \\ e^{2y} = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \\ y = 0. \end{cases}$$

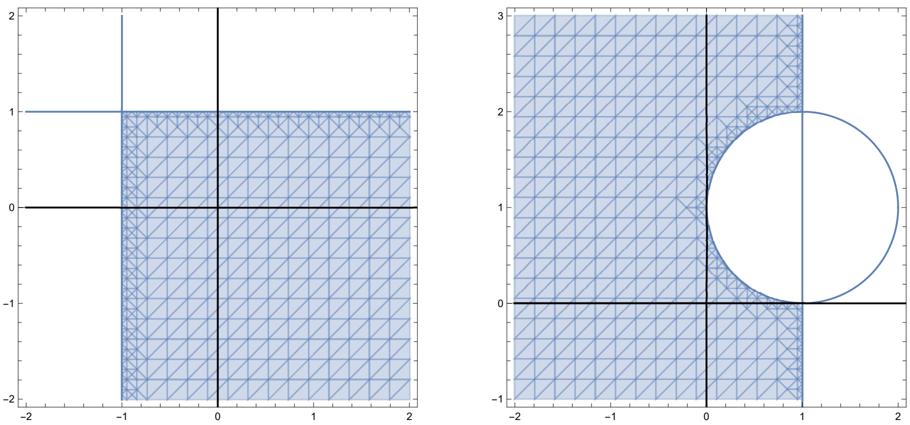
Logo, a função é diferenciável nos pontos $\frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. A derivada de f nesses pontos é

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) &= f_x\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = -i, \\ f'\left(\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi\right) &= f_x\left(\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi\right) = i, \\ f'\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) &= f_x\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^{k+1} i. \end{aligned}$$

2. A imagem da recta $\{\Re z = -1\}$ é uma recta porque a recta passa em -1. Além disso, passa em 1 ($\infty \mapsto 1$). Como a função envia a recta real nela própria, a imagem é simétrica em relação ao eixo real. Logo, a imagem é a recta $\{\Re z = 1\}$.

A imagem da recta $\{\Im z = 1\}$ é uma circunferência porque a recta não passa em -1. A circunferência passa em 1 ($\infty \mapsto 1$) e passa em i ($i \mapsto i$). É perpendicular à recta $\{\Re z = 1\}$ porque as rectas $\{\Re z = -1\}$ e $\{\Im z = 1\}$ são perpendiculares. Trata-se portanto da circunferência $\{|z - (1+i)| = 1\}$.

Uma vez que a imagem de 0 é -1, a imagem da região no enunciado é $\{z \in \mathbb{C} : \Re z < 1 \text{ e } |z - (1+i)| > 1\}$. Nota: $-1 + i \mapsto 1 + 2i$.



Os planos z e $\frac{z-1}{z+1}$.

3.

a) Em $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$, as derivadas parciais de f são

$$\begin{aligned} f_r &= \frac{2\ln r}{r}, \\ f_\theta &= -2i\theta, \\ -\frac{i}{r}f_\theta &= -\frac{2\theta}{r}. \end{aligned}$$

Como são funções contínuas em $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$, f é $\mathbb{R}$-diferenciável em $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$. A equação de Cauchy-Riemann é satisfeita quando

$$f_r = -\frac{i}{r}f_\theta \;\Leftrightarrow\; \ln r = -\theta \;\Leftrightarrow\; r = e^{-\theta}, \quad \text{para } \theta \in]-\pi,\pi[.$$

Logo, a função é diferenciável nos pontos $e^{-\theta}e^{i\theta}$, onde $\theta \in]-\pi,\pi[$. A derivada de f é

$$f'(e^{-\theta}e^{i\theta}) = e^{-i\theta}f_r(e^{-\theta}e^{i\theta}) = e^{-i\theta}\frac{2\ln e^{-\theta}}{e^{-\theta}} = -2\theta e^{(1-i)\theta}.$$

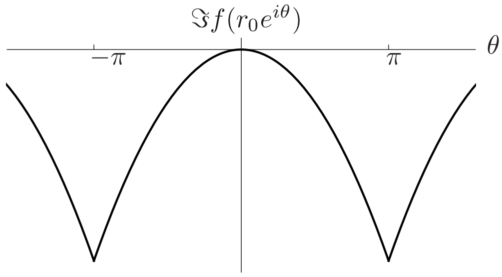
Seja $r_0 > 0$. A função f é contínua no eixo real negativo porque

$$\begin{aligned} f^+(r_0e^{i\pi}) &:= \lim_{r\to r_0,\,\theta\to-\pi^+} f(re^{i\theta}) = (\ln r_0)^2 - i(-\pi)^2 \\ &= f^-(r_0e^{i\pi}) := \lim_{r\to r_0,\,\theta\to\pi^-} f(re^{i\theta}) = (\ln r_0)^2 - i\pi^2. \end{aligned}$$

A restrição de f à circunferência de raio r_0 centrada na origem não é diferenciável no ponto onde a circunferência intersecta o eixo real negativo porque

$$f_\theta^-(r_0e^{i\pi}) = -2\theta i|_{\theta=\pi} = -2\pi i \neq f_\theta^+(r_0e^{i\pi}) = -2\theta i|_{\theta=-\pi} = 2\pi i.$$

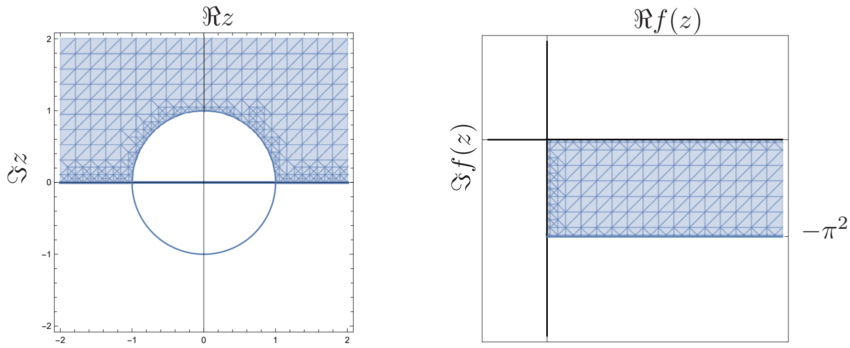
Portanto, a função não é diferenciável no eixo real negativo.



A restrição de $\theta \mapsto \Im f(r_0 e^{i\theta})$ a $[-\pi, \pi]$ é $-\theta^2$.

b) Uma das formas de garantir a invertibilidade local de f é aplicar o Teorema da Função Inversa. Os vectores f_r e f_θ (definidos em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$) são sempre ortogonais. O primeiro anula-se sse $r = 1$, o segundo anula-se sse $\theta = 0$. O Teorema da Função Inversa garante que f é localmente invertível em torno de pontos $re^{i\theta}$ tais que $r \neq 1$ e $\theta \notin \{0, \pi\}$, ou seja, em torno de pontos que não pertençam à união da circunferência de raio um centrada na origem com o eixo real. O facto de se ter que excluir $\theta = \pi$ resulta de termos definido as coordenadas polares com o θ a variar em $]-\pi, \pi]$. Se $r_0 > 0$ e $\theta_0 = \pi$, estas coordenadas não são um difeomorfismo de uma vizinhança de (r_0, π) numa vizinhança de $r_0 e^{i\pi}$.

Outra forma de garantir a invertibilidade local de f é notar que $r \mapsto (\ln r)^2$ é positiva e estritamente crescente em $[1, \infty[$, e é positiva e estritamente decrescente em $]0, 1]$, tendo-se $\left(\ln \frac{1}{r}\right)^2 = (-\ln r)^2 = (\ln r)^2$. Além disso, $\theta \mapsto -\theta^2$ é negativa e estritamente decrescente em $]0, \pi]$, e é negativa e estritamente crescente em $[-\pi, 0[$, tendo-se $-(-\theta)^2 = -\theta^2$. Daqui também resulta que f é localmente invertível em torno de pontos que não pertençam à união da circunferência de raio um centrada na origem com o eixo real.



Se V é uma vizinhança de um ponto na união da circunferência de raio um centrada na origem com o eixo real, então a restrição de f a V não é invertível porque $f(re^{i\theta}) = f\left(\frac{1}{r} e^{i\theta}\right)$ e $f(re^{i\theta}) = f(re^{-i\theta})$.

Qualquer vizinhança de um ponto da circunferência de raio um centrada na origem contém um par de pontos da forma $re^{i\theta}$ e $\frac{1}{r}e^{i\theta}$; e qualquer vizinhança de um ponto no eixo real contém um par de pontos da forma $re^{i\theta}$ e $re^{-i\theta}$.

Da monotonicidade da parte real e da parte imaginária de f, resulta que a restrição de f a cada um dos conjuntos abertos conexos

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1 \text{ e } \Im z > 0\}, \quad \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1 \text{ e } \Im z < 0\},$$
$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ e } \Im z > 0\}, \quad \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ e } \Im z < 0\}$$

é injectiva, e que o contradomínio de f é $[0, \infty[\times[-\pi^2, 0]$.

Os pontos pertencentes ao conjunto $\{0\}\times]-\pi^2, 0[$ têm duas pré-imagens $e^{i\theta}$ e $e^{-i\theta}$. Os pontos pertencentes ao conjunto $]0, \infty[\times\{0\}$ têm duas pré-imagens r e $\frac{1}{r}$. Os pontos pertencentes ao conjunto $]0, \infty[\times\{-\pi^2\}$ têm duas pré-imagens $re^{i\pi}$ e $\frac{1}{r}e^{i\pi}$. O ponto 0 tem uma pré-imagem, 1. Finalmente, o ponto $-i\pi^2$ tem uma pré-imagem, $e^{i\pi} = -1$.
Nota: Cada ponto em $]0, \infty[\times] - \pi^2, 0[$ tem quatro pré-imagens $re^{i\theta}$, $\frac{1}{r}e^{i\theta}$, $re^{-i\theta}$, $\frac{1}{r}e^{-i\theta}$.

B

Introdução à Análise Complexa

1º Mini-Teste - 13 de Outubro de 2023

LMAC

Resolução

1. As derivadas parciais de f são

$$\begin{aligned} f_x &= e^{-y}\cos x - ie^{y}\sin x, \\ f_y &= -e^{-y}\sin x + ie^{y}\cos x, \\ -if_y &= e^{y}\cos x + ie^{-y}\sin x. \end{aligned}$$

Como são contínuas, f é $\mathbb{R}$-diferenciável. A equação de Cauchy-Riemann é satisfeita quando

$$f_x = -if_y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin x = 0, \\ e^{2y} = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = k\pi, \\ y = 0. \end{cases}$$

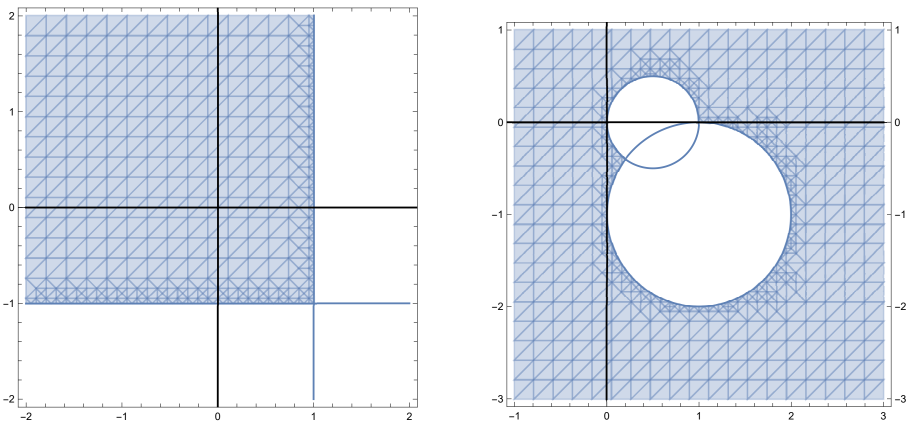
Logo, a função é diferenciável nos pontos $k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. A derivada de f nesses pontos é

$$\begin{aligned} f'(2k\pi) &= f_x(2k\pi) = 1, \\ f'((2k+1)\pi) &= f_x((2k+1)\pi) = -1, \\ f'(k\pi) &= f_x(k\pi) = (-1)^k. \end{aligned}$$

2. A imagem da recta $\{\Re z = 1\}$ é uma circunferência porque a recta não passa em -1. A circunferência passa em 1 ($\infty \mapsto 1$). Como a função envia a recta real nela própria, a imagem é simétrica em relação ao eixo real. Logo, a imagem é a circunferência $\left\{\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\right\}$.

A imagem da recta $\{\Im z = -1\}$ é uma circunferência porque a recta não passa em -1. A circunferência passa em 1 ($\infty \mapsto 1$) e passa em $-i$ ($-i \mapsto -i$). É perpendicular à circunferência $\left\{\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\right\}$ porque as rectas $\{\Re z = 1\}$ e $\{\Im z = -1\}$ são perpendiculares. Trata-se portanto da circunferência $\{|z - (1-i)| = 1\}$. (O ponto $1-2i$ pertence à circunferência, ele é a imagem de $-1-i$.)

Uma vez que a imagem de 0 é -1, a imagem da região no enunciado é $\left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2} \text{ e } |z-(1-i)| > 1\right\}$. Nota: $1 - i \mapsto \frac{1-2i}{5}$.



Os planos z e $\frac{z-1}{z+1}$.

3.

a) Em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$, as derivadas parciais de f são

$$\begin{aligned} f_r &= \frac{4(\ln r)^3}{r}, \\ f_\theta &= 4i\theta^3, \\ -\frac{i}{r} f_\theta &= \frac{4\theta^3}{r}. \end{aligned}$$

Como são funções contínuas em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$, f é $\mathbb{R}$-diferenciável em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$. A equação de Cauchy-Riemann é satisfeita quando

$$f_r = -\frac{i}{r} f_\theta \;\Leftrightarrow\; (\ln r)^3 = \theta^3 \;\Leftrightarrow\; \ln r = \theta \;\Leftrightarrow\; r = e^\theta, \quad \text{para } \theta \in]-\pi, \pi[.$$

Logo, a função é diferenciável nos pontos $e^\theta e^{i\theta}$, onde $\theta \in]-\pi, \pi[$. A derivada de f é

$$f'(e^\theta e^{i\theta}) = e^{-i\theta} f_r(e^\theta e^{i\theta}) = e^{-i\theta} \frac{4(\ln e^\theta)^3}{e^\theta} = 4\theta^3 e^{-(1+i)\theta}.$$

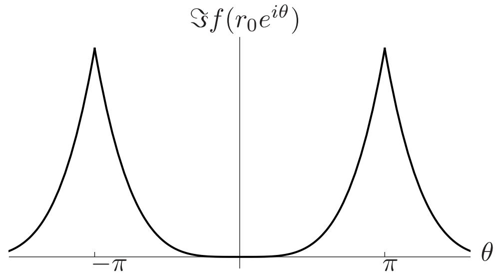
Seja $r_0 > 0$. A função f é contínua no eixo real negativo porque

$$\begin{aligned} f^+(r_0 e^{i\pi}) &:= \lim_{r \to r_0\, \theta \to -\pi^+} f(re^{i\theta}) = (\ln r_0)^4 + i(-\pi)^4 \\ &= f^-(r_0 e^{i\pi}) := \lim_{r \to r_0\, \theta \to \pi^-} f(re^{i\theta}) = (\ln r_0)^4 + i\pi^4. \end{aligned}$$

A restrição de f à circunferência de raio r_0 centrada na origem não é diferenciável no ponto onde a circunferência intersecta o eixo real negativo porque

$$f_\theta^-(r_0 e^{i\pi}) = 4\theta^3 i|_{\theta=\pi} = 4\pi^3 i \neq f_\theta^+(r_0 e^{i\pi}) = 4\theta^3 i|_{\theta=-\pi} = -4\pi^3 i.$$

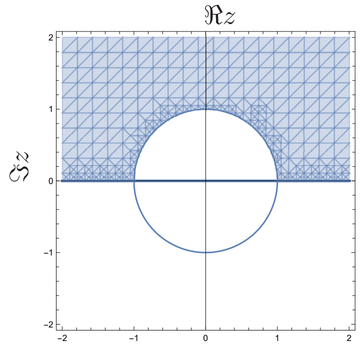
Portanto, a função não é diferenciável no eixo real negativo.

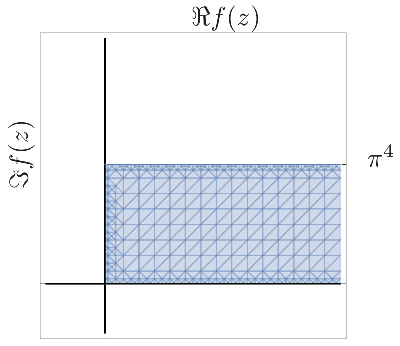


A restrição de $\theta \mapsto \Im f(r_0 e^{i\theta})$ a $[-\pi, \pi]$ é θ^4.

b) Uma das formas de garantir a invertibilidade local de f é aplicar o Teorema da Função Inversa. Os vectores f_r e f_θ (definidos em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$) são sempre ortogonais. O primeiro anula-se sse $r = 1$, o segundo anula-se sse $\theta = 0$. O Teorema da Função Inversa garante que f é localmente invertível em torno de pontos $re^{i\theta}$ tais que $r \neq 1$ e $\theta \notin \{0, \pi\}$, ou seja, em torno de pontos que não pertençam à união da circunferência de raio um centrada na origem com o eixo real. O facto de se ter que excluir $\theta = \pi$ resulta de termos definido as coordenadas polares com o θ a variar em $]-\pi, \pi]$. Se $r_0 > 0$ e $\theta_0 = \pi$, estas coordenadas não são um difeomorfismo de uma vizinhança de (r_0, π) numa vizinhança de $r_0 e^{i\pi}$.

Outra forma de garantir a invertibilidade local de f é notar que $r \mapsto (\ln r)^4$ é positiva e estritamente crescente em $[1, \infty[$, e é positiva e estritamente decrescente em $]0, 1]$, tendo-se $\left(\ln \frac{1}{r}\right)^4 = (-\ln r)^4 = (\ln r)^4$. Além disso, $\theta \mapsto \theta^4$ é positiva e estritamente crescente em $]0, \pi]$, e é positiva e estritamente decrescente em $[-\pi, 0[$, tendo-se $(-\theta)^4 = \theta^4$. Daqui também resulta que f é localmente invertível em torno de pontos que não pertençam à união da circunferência de raio um centrada na origem com o eixo real.





Se V é uma vizinhança de um ponto na união da circunferência de raio um centrada na origem com o eixo real, então a restrição de f a V não é invertível porque $f(re^{i\theta}) = f\left(\frac{1}{r} e^{i\theta}\right)$ e $f(re^{i\theta}) = f(re^{-i\theta})$.

Qualquer vizinhança de um ponto da circunferência de raio um centrada na origem contém um par de pontos da forma $re^{i\theta}$ e $\frac{1}{r}e^{i\theta}$; e qualquer vizinhança de um ponto no eixo real contém um par de pontos da forma $re^{i\theta}$ e $re^{-i\theta}$.

Da monotonicidade da parte real e da parte imaginária de f, resulta que a restrição de f a cada um dos conjuntos abertos conexos

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1 \text{ e } \Im z > 0\}, \quad \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1 \text{ e } \Im z < 0\},$$
$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ e } \Im z > 0\}, \quad \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ e } \Im z < 0\}$$

é injectiva, e que o contradomínio de f é $[0, \infty[\times[0, \pi^4]$.

Os pontos pertencentes ao conjunto $\{0\}\times]0, \pi^4[$ têm duas pré-imagens $e^{i\theta}$ e $e^{-i\theta}$. Os pontos pertencentes ao conjunto $]0, \infty[\times\{0\}$ têm duas pré-imagens r e $\frac{1}{r}$. Os pontos pertencentes ao conjunto $]0, \infty[\times\{\pi^4\}$ têm duas pré-imagens $re^{i\pi}$ e $\frac{1}{r}e^{i\pi}$. O ponto 0 tem uma pré-imagem, 1. Finalmente, o ponto $i\pi^4$ tem uma pré-imagem, $e^{i\pi} = -1$.
Nota: Cada ponto em $]0, \infty[\times]0, \pi^4[$ tem quatro pré-imagens $re^{i\theta}$, $\frac{1}{r}e^{i\theta}$, $re^{-i\theta}$, $\frac{1}{r}e^{-i\theta}$.