, **A**

Introdução à Análise Complexa

1º Mini-Teste - 20 de Outubro de 2022

LMAC

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Determine a imagem de $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re z < 1 \text{ e } 0 < \Im z < \pi\}$ por $z \mapsto \exp(2z)$. (5)
Resposta. $\{w \in \mathbb{C} : 1 < |w| < e^2 \text{ e } w \notin \mathbb{R}^+\}$.

2. Determine a imagem de $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ por $z \mapsto \frac{z}{iz-1}$. (5)
Resposta. $\{w \in \mathbb{C} : \Im w > -1/2\}$.

3. Estude a diferenciabilidade da função $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, definida por $f(re^{i\theta}) = 2r^3 + r^3 e^{-3i\theta}$. Calcule a derivada. (5)
Resposta: $f_r = 6r^2 + 3r^2 e^{-3i\theta}$, $f_\theta = -3ir^3 e^{-3i\theta}$. Como estas funções são contínuas em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, a função é $\mathbb{R}$-diferenciável em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. $f_r = -\frac{i}{r} f_\theta$ é equivalente a $6r^2 + 6r^2 e^{-3i\theta} = 0$, ou seja a $e^{-3i\theta} = -1$, ou ainda a $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\theta = -\frac{\pi}{3}$, ou $\theta = \pi$. Na união destas três semi-rectas a derivada vale $f'(re^{i\theta}) = e^{-i\theta} f_r = 3r^2 e^{-i\theta}$.

4. Determine o conjunto de pontos onde o Teorema da Derivada da Função Composta garante a diferenciabilidade de $z \mapsto \log\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$, onde o logaritmo é o principal. Justifique que esta função não é diferenciável nos restantes pontos do seu domínio. (5)
Resposta: Note-se que -1 e 1 não pertencem ao domínio da função. Seja $w = \frac{z-1}{z+1}$. Se $w \notin \mathbb{R}^-$, então a função é diferenciável porque é a composta de funções diferenciáveis. Como $z = \frac{1+w}{1-w}$ e o eixo real negativo $\{w \in \mathbb{R}^-\}$ corresponde ao segmento de recta $L := \{z \in \mathbb{C} : z = x \text{ com } -1 < x < 1\}$, a função é diferenciável em $\mathbb{C} \setminus (L \cup \{-1, 1\})$.

A função não é diferenciável em L porque é descontínua em L. Com efeito, $\{\Im z > 0\}$ corresponde a $\{\Im w > 0\}$; e $\{\Im z < 0\}$ corresponde a $\{\Im w < 0\}$. Portanto, quando z converge para um ponto de L pelo semi-plano $\{\Im z > 0\}$, então w converge para um ponto do eixo real negativo pelo semi-plano $\{\Im w > 0\}$. Quando z converge para um ponto de L pelo semi-plano $\{\Im z < 0\}$, então w converge para um ponto do eixo real negativo pelo semi-plano $\{\Im w < 0\}$. Assim, a descontinuidade do logaritmo principal no eixo real negativo implica a descontinuidade da função em L: se $x_0 \in L$, então

$$\lim_{\substack{z \to x_0 \\ \Im z < 0}} \log\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \lim_{\substack{w \to \frac{x_0-1}{x_0+1} \\ \Im w < 0}} \log w = \log\left(\frac{x_0-1}{x_0+1}\right) - 2\pi i.$$

B

Introdução à Análise Complexa

1º Mini-Teste - 20 de Outubro de 2022

LMAC

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Determine a imagem de $\{z \in \mathbb{C} : -1 < \Re z < 0 \text{ e } -\pi < \Im z < 0\}$ por $z \mapsto \exp(z/2)$. (5)

Resposta. $\{w \in \mathbb{C} : e^{-1/2} < |w| < 1 \text{ e } -\pi/2 < \arg w < 0\}$.

2. Determine a imagem de $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ por $z \mapsto \frac{z}{z-i}$. (5)

Resposta. $\{w \in \mathbb{C} : \Re w < 1/2\}$.

3. Estude a diferenciabilidade da função $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, definida por $f(re^{i\theta}) = \frac{7}{3}r^3 + r^3 e^{-4i\theta}$. Calcule a derivada. (5)

Resposta: $f_r = 7r^2 + 3r^2 e^{-4i\theta}$, $f_\theta = -4ir^3 e^{-4i\theta}$. Como estas funções são contínuas em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, a função é $\mathbb{R}$-diferenciável em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. $f_r = -\frac{i}{r} f_\theta$ é equivalente a $7r^2 + 7r^2 e^{-4i\theta} = 0$, ou seja a $e^{-4i\theta} = -1$, ou ainda a $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$ ou $\theta = \pm\frac{3\pi}{4}$. Na união destas quatro semi-rectas a derivada vale $f'(re^{i\theta}) = e^{-i\theta} f_r = 4r^2 e^{-i\theta}$.

4. Determine o conjunto de pontos onde o Teorema da Derivada da Função Composta garante a diferenciabilidade de $z \mapsto \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$, onde o logaritmo é o principal. Justifique que esta função não é diferenciável nos restantes pontos do seu domínio. (5)

Resposta: Note-se que -1 e 1 não pertencem ao domínio da função. Seja $w = \frac{1+z}{1-z}$. Se $w \notin \mathbb{R}^-$, então a função é diferenciável porque é a composta de funções diferenciáveis. Como $z = \frac{w-1}{w+1}$ e o eixo real negativo $\{w \in \mathbb{R}^-\}$ corresponde à união das semi-rectas $L_1 := \{z \in \mathbb{C} : z = x \text{ com } x < -1\}$ e $L_2 := \{z \in \mathbb{C} : z = x \text{ com } x > 1\}$, a função é diferenciável em $\mathbb{C} \setminus (L_1 \cup L_2 \cup \{-1, 1\})$.

A função não é diferenciável em $L_1 \cup L_2$ porque é descontínua em $L_1 \cup L_2$. Com efeito, $\{\Im z > 0\}$ corresponde a $\{\Im w > 0\}$; e $\{\Im z < 0\}$ corresponde a $\{\Im w < 0\}$. Portanto, quando z converge para um ponto de $L_1 \cup L_2$ pelo semi-plano $\{\Im z > 0\}$, então w converge para um ponto do eixo real negativo pelo semi-plano $\{\Im w > 0\}$. Quando z converge para um ponto de $L_1 \cup L_2$ pelo semi-plano $\{\Im z < 0\}$, então w converge para um ponto do eixo real negativo pelo semi-plano $\{\Im w < 0\}$. Assim, a descontinuidade do logaritmo principal no eixo real negativo implica a descontinuidade da função em $L_1 \cup L_2$: se $x_0 \in L_1 \cup L_2$, então

$$\lim_{\substack{z \to x_0 \\ \Im z < 0}} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \lim_{\substack{w \to \frac{1+x_0}{1-x_0} \\ \Im w < 0}} \log w = \log\left(\frac{1+x_0}{1-x_0}\right) - 2\pi i.$$