Introdução à Análise Complexa

$1^{\underline{o}}$ Semestre de 2022/23

LMAC

Exercícios

I Números complexos

1. Escreva os seguintes números complexos na forma algébrica e represente-os no plano de Argand:

   a) $(2+i)(1-i) = 3-i$,

   b) $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}$,

   c) $\frac{2+i}{1+i} = \frac{3-i}{2}$,

   d) $(2-3i)^2 = -5-12i$,

   e) $(1-2i)^3 = -11+2i$,

   f) $i^{81} = i$.

2. Determine o módulo e o argumento dos seguintes números complexos e represente-os no plano de Argand:

   a) $3 = 3E(i0)$,

   b) $-2 = 2E(i\pi)$,

   c) $1+i = \sqrt{2}E\big(i\frac{\pi}{4}\big)$,

   d) $3-4i = 5E\big(-i\arctan\frac{4}{3}\big)$,

   e) $-1-i = \sqrt{2}E\big(i\frac{5\pi}{4}\big)$.

3. Verifique as seguintes propriedades do conjugado:

   a) $\overline{\overline{z}} = z$.

   b) $\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}$,

   c) $\overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$,

   d) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.

4. Verifique as seguintes propriedades do módulo:

   a) $|\overline{z}| = |z|$.

   b) $|zw| = |z|\ |w|$,

c) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$,

d) $|z+w| \leq |z| + |w|$,

e) $|z-w| \geq ||z| - |w||$.

5. Calcule as raízes cúbicas de $-8i$ e assinale-as no plano complexo. Resposta: $2E\left(-i\frac{\pi}{6}\right)$, $2E\left(i\frac{\pi}{2}\right)$, $2E\left(i\frac{7\pi}{6}\right)$.

6. Determine para que valores de θ, pertencentes ao intervalo $]-\pi, \pi]$, se tem
$$|1 + E(i\theta)| = \sqrt{2}.$$
Resposta: $\pm\frac{\pi}{2}$.

7. Sejam z_1, z_2 e z_3 três números complexos de módulo unitário satisfazendo $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Mostre que esses complexos são vértices de um triângulo equilátero. Sugestão: Comece por reduzir ao caso em que $z_1 = 1$; verifique que então z_2 e z_3 são conjugados; logo $z_2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $z_3 = -\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

8. Determine as soluções das seguintes equações:

   (i) $(1-z)^6 = (1+z)^6$. Resposta: 0, $\pm i\sqrt{3}$, $\pm\frac{i}{\sqrt{3}}$.

   (ii) $1 - z + z^2 = 0$. Resposta: $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

   (iii) $z^6 - z^4 + z^2 - 1 = 0$. Resposta: ± 1, $E(\pm i\frac{\pi}{4})$, $E(\pm i\frac{3\pi}{4})$.

   (iv) $1 + z + z^2 + ... + z^7 = 0$. Resposta: -1, $\pm i$, $E(\pm i\frac{\pi}{4})$, $E(\pm i\frac{3\pi}{4})$.

9. Calcule e represente no plano de Argand:

   a) $\sqrt[3]{i}$. Resposta: $E\left(i\frac{\pi}{6}\right)$, $E\left(i\frac{5\pi}{6}\right)$, $E\left(i\frac{3\pi}{2}\right)$.

   b) $\sqrt[4]{-1}$. Resposta: $E\left(i\frac{\pi}{4}\right)$, $E\left(i\frac{3\pi}{4}\right)$, $E\left(i\frac{5\pi}{4}\right)$, $E\left(i\frac{7\pi}{4}\right)$.

   c) $\sqrt{1-i}$. Resposta: $\sqrt[4]{2}E\left(-i\frac{\pi}{8}\right)$, $\sqrt[4]{2}E\left(i\frac{7\pi}{8}\right)$.

10. Verifique se $\{(\sqrt[3]{z})^2\} = \{\sqrt[3]{z^2}\}$ para todo o $z \in \mathbb{C}$.

II Funções complexas

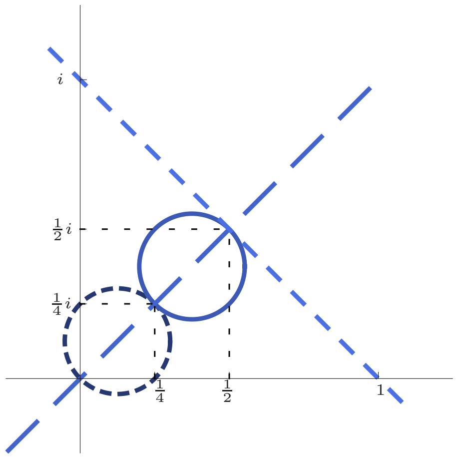
1. a) Determine a equação da recta que passa por -1 e i. Resposta: $(-1+i)\overline{z}+(-1-i)z-2=0$.

   b) Determine a equação da circunferência que tem centro em -1 e passa por i. Resposta: $|z+1|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |z|^2+z+\overline{z}-1=0$.

   c) Determine dois pontos da recta $(1-2i)z+(1+2i)\overline{z}-2=0$. Resposta: 1 e $\frac{i}{2}$.

   d) Determine o centro e o raio da circunferência $|z|^2-(1-i)z-(1+i)\overline{z}+1=0$. Resposta: $1+i$ e 1.

2. Represente a imagem das duas rectas e das duas circunferências por $z \mapsto \frac{1}{z}$:



3. Calcule as imagens das regiões R pelas funções f:

   a) $R=\{z\in\mathbb{C}:|z|<2,\ \pi/4<\arg z<\pi/2\}$, $f(z)=z^3$.

   b) $R=\{z\in\mathbb{C}:|z|<2\}$, $f(rE(i\theta))=\sqrt[3]{r}E(i\theta/3)$ com $-\pi<\theta\leq\pi$.

   c) $R=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$, $f(z)=\frac{1}{z+1}$.
   Resposta: $\left\{z\in\mathbb{C}:\Re z>\frac{1}{2}\right\}$

   d) $R=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$, $f(z)=\frac{z-1}{iz+1}$.
   Resposta: $\left\{z\in\mathbb{C}:\Im(1-i)z>0\right\}$.

   e) $R=\{z\in\mathbb{C}:1<\Re z<2,\ 0<\Im z<1,\ |z-2|>1\}$, $f(z)=\frac{1}{z-1}$.
   Resposta: $\left\{z\in\mathbb{C}:0<\Re z<\frac{1}{2},\ \left|z+\frac{i}{2}\right|>\frac{1}{2},\ \Im z<0\right\}$.

f) $R = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 1, \Im z < 0\}$, $f(z) = \frac{1}{z+i}$.
Resposta: $\left\{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2},\ |z + \frac{i}{2}| > \frac{1}{2}\right\}$

4. Sejam a e b números complexos. Prove usando complexos que

$$\Re\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = 0$$

representa a equação de uma circunferência com diâmetro de extremidades em a e b.

5. Calcule as imagens das regiões R pelas funções f:

a) $R = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$, $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ (transformação conforme de um semiplano num disco).

b) $R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ e } \Im z > 0\}$, $f(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$ (transformação conforme de um semidisco num semiplano).

c) $R = \mathbb{C} \setminus \{z = x + i0 \in \mathbb{C} : x \in [-1, 1]\}$, $f(z) = \sqrt{\frac{z+1}{z-1}}$ (transformação conforme do complemento de um segmento de recta num semiplano).

III Diferenciabilidade de funções complexas

1. Estude a diferenciabilidade de $x + iy \mapsto e^x E(iy)$.
   Resposta: A função é diferenciável em qualquer $z = x + iy \in \mathbb{C}$ e com derivada igual à função.

2. Estude a diferenciabilidade da função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por
   $$f(x + iy) = (x^2 - y^2) + i(2xy + \cos y).$$
   Resposta: f é diferenciável quando $y = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Neste caso, $f'(z) = 2z$.

3. Estude a diferenciabilidade das funções $z \mapsto \overline{z}^2$, $z \mapsto z^2\overline{z}$ e $z \mapsto |z|\overline{z}$.
   Resposta: Qualquer das funções é diferenciável apenas em $z = 0$ e com derivada nula.

4. Estude a diferenciabilidade da função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por
   $$f(x + iy) = \tfrac{1}{3}(x + 1)^3 + y^2 + iy.$$
   Resposta: $f'(-2, 0) = 1$ e $f'(0, 0) = 1$.

5. Determine o conjunto dos pontos onde a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por
   $$f(x + iy) = -(x + 1)E(iy) + i(x - 1)E(-iy),$$
   é diferenciável.
   Resposta: f é diferenciável quando $x = 0$ ou quando $y = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

IV Diferenciabilidade de funções complexas em coordenadas polares, séries de potências complexas, exponencial, logaritmo

1. Usando a equação de Cauchy-Riemann na forma polar, prove a diferenciabilidade e calcule a derivada de

   a) $z \mapsto 1/z^n$ com $n \in \mathbb{N}_1$;

   b) $z \mapsto \sqrt[n]{z}$ onde $\sqrt[n]{re^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}e^{i\theta/n}$ com $-\pi < \theta \leq \pi$, onde $n \in \mathbb{N}$. Esta função é diferenciável no eixo real negativo? E em zero?

2. Estude a diferenciabilidade e calcule a derivada da função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por $f(re^{i\theta}) = r^2 + i\theta$ para $r > 0$ e $-\pi < \theta \leq \pi$, e por $f(0) = 0$.

3. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, definida por

$$f(re^{i\theta}) = (r \ln r - r^2)e^{i\theta}.$$

   a) Estude a diferenciabilidade e calcule a derivada de f.

   b) Determine se f pode ser prolongada por continuidade à origem. Em caso afirmativo, estude a diferenciabilidade do prolongamento na origem.

4. Determine o raio de convergência de

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, Resposta: $R = 1$,

   b) $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$, Resposta: $R = 1$,

   c) $\sum_{n=0}^{\infty} e^n z^n$, Resposta: $R = e^{-1}$,

   d) $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$, Resposta: $R = 0$,

   e) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2n} z^n$, Resposta: $R = 4$,

   f) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2(-1)^n} z^n$, Resposta: $R = 0$,

   g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3} z^n$, Resposta: $R = 1/2$.

5. Esboce a imagem de $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re z < 1,\ 0 < \Im z < \pi\}$ por $z \mapsto e^z$.

6. Obtenha o desenvolvimento em série de potências de $\sin z$.

7. Estude a diferenciabilidade de $z \mapsto \log z$, onde

$$\log\left(re^{i\theta}\right) = \ln r + i\theta \quad \text{com} \ -\pi < \theta \leq \pi$$

é o logaritmo principal.

8. Esboce a imagem de $\{z \in \mathbb{C} : \Re z < 0,\ |z| > 1\}$ por $z \mapsto \log z$ onde log designa o logaritmo principal.

9. Calcule

a) $\log(-i)$, Resposta: $-i\pi/2$,

b) $\log(1-i)$, Resposta: $\ln 2/2 - i\pi/4$,

c) $\log\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$, Resposta: $i\pi/3$,

d) i^i. Resposta: $e^{-\pi/2}$,

10. Estabeleça as seguintes identidades (onde $z \in \mathbb{C}$):

a) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$,

b) $\cos(iz) = \cosh(z)$,

c) $\sin(iz) = i \sinh z$,

d) $\sin(z+w) = \sin z \cdot \cos w \ + \cos z \cdot \sin w$.

e) $\sin\Big(-i \log\big(iz + \sqrt{1-z^2}\big)\Big) = z$.

11. Mostre que a função $\sin z$ é ilimitada em qualquer recta não paralela ao eixo real.

12. Resolva as seguintes equações:

a) $e^z = -1$, Resposta: $z = i(2k+1)\pi$,

b) $\log(i - z) = 1$, Resposta: $z = -e + i$,

c) $\sin z - \cos z = i$, Resposta: $z = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k - i \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$ ou $z = \frac{\pi}{4} + 2\pi k - i \ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)$ com $k \in \mathbb{Z}$.

V Integrais de Funções Complexas, Teorema Fundamental do Cálculo, Teorema de Cauchy, Fórmula Integral de Cauchy

1. Usando a definição, calcule

   a) $\int_\gamma \overline{z}\, dz$ onde γ é o segmento de recta que une 1 a $2+3i$. r: $6+3i$.

   b) $\int_\gamma z^2\, dz$, onde γ é o arco de circunferência que une 3 a $1-2i$ e que passa por $1+2i$. r: $\frac{(1-2i)^3}{3} - \frac{3^3}{3}$.

   c) $\int_\gamma \overline{z}\, dz$ onde γ é o troço de parábola $\{x+iy \in \mathbb{C} : y = x^2\}$ com início em 0 e fim em $1+i$. r: $1+\frac{i}{3}$.

   d) $\int_{|z|=r} \arg z\, |dz|$, onde $\arg z$ designa o argumento principal. r: 0.

2. Calcule ao longo de uma curva no primeiro quadrante:

   a) $\int_2^{1+i} z\, dz$; r: $-2+i$

   b) $\int_1^i (1+\sqrt{z})\, dz$, onde $\sqrt{z}$ designa a raiz principal; r: $i-1+\frac{2}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i-1\right)$;

   c) $\int_0^{1+i\pi/2} e^{2z}\, dz$; r: $-\frac{1+e^2}{2}$

   d) $\int_1^i \frac{1}{z}\, dz$; r: $\frac{i\pi}{2}$.

3. Justifique que

   a) $z \mapsto \int_0^z e^{\sin w}\, dw$,

   b) $z \mapsto \int_0^{z^2} \sin(w^2)\, dw$, e

   c) $z \mapsto \int_0^{\sin z} e^{w^2}\, dw$

   são funções bem definidas. Calcule as suas derivadas. r: $e^{\sin z}$, $2z\sin(z^4)$, e $\cos z\, e^{\sin^2 z}$.

4. Calcule

   a) $\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\, dz$; r: $2\pi i$;

   b) $\int_{|z|=1} \frac{z}{(z-2)^2(z+4)}\, dz$; r: 0;

   c) $\int_{|z|=3} \frac{z}{(z-2)^2(z+4)}\, dz$; r: $\frac{2\pi i}{9}$;

   d) $\int_{|z|=5} \frac{z}{(z-2)^2(z+4)}\, dz$; r: 0.

5. Calcule

a) $\int_{|z|=2.5} \frac{1}{z^2+5z+6}\, dz$; r: $2\pi i$;

b) $\int_{|z|=2} \frac{1}{(z+1)^n}\, dz$, $n \in \mathbb{Z}$; r: 0 se $n \neq -1$, $2\pi i$ se $n = 1$;

c) $\int_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z+1)^n}\, dz$, $n \in \mathbb{Z}$; r: 0 se $n \leq 0$, $\frac{2\pi i}{(n-1)!} 2^{n-1} e^{-2}$ se $n > 0$;

d) $\int_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2-1)^2}\, dz$; r: $-\frac{\pi i}{2}$;

e) $\int_{|z|=3\pi} \frac{\sin z}{z}\, dz$; r: 0.

6. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e considere a função $u(x,y) = x^3\lambda^3 - 3xy^2\lambda$.

   (i) Determine para que valores de λ a função u é harmónica.
   Resposta: $\lambda = 0$ ou $\lambda = \pm 1$

   (ii) Considere $\lambda = 1$. Determine uma função inteira f tal que $f(0) = i$ e a parte real de f é u.
   Resposta: $f(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3 + 1)$

   (iii) Calcule o integral
   $$\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^4}\, dz$$
   onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido direto.
   Resposta: $2\pi i$

7. Seja f uma função inteira que satisfaz $|f(z)| \leq c(1 + |z|^3)$ para determinado c em $\mathbb{R}^+$. O que pode afirmar quanto a f? Sugestão: Prove uma generalização do Teorema de Liouville.

8. Sejam $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$. Suponha f é inteira e que o seu contradomínio não intersecta a bola aberta de raio r centrada em a. Prove que f é constante.

VI Séries de Taylor e de Laurent, Teorema dos Resíduos

1. Calcule o desenvolvimento em série de Taylor ou Laurent em torno do ponto zero, indicando a maior região onde é válido:

   a) $z \mapsto \frac{1}{1-z}$; r: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ para $|z| < 1$;

   b) $z \mapsto \frac{1}{1+z}$; r: $\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n$ para $|z| < 1$;

   c) $z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$; r: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$ para $|z| < 1$;

   d) $z \mapsto \frac{1}{(1-z)^2}$; r: $\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$ para $|z| < 1$;

   e) $z \mapsto \log(1+z)$; r: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$ para $|z| < 1$;

   f) $z \mapsto e^z$; r: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ para todo o z;

   g) $z \mapsto \sin z$; r: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ para todo o z;

   h) $z \mapsto \cos z^3$; r: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{6n}}{(2n)!}$ para todo o z;

   i) $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$. r: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$ para todo o $z \neq 0$;

2. Calcule o desenvolvimento em série de Taylor ou Laurent em torno do ponto a, indicando a maior região onde é válido:

   a) $z \mapsto \frac{1}{z}$ em torno de a; r: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-a)^n}{a^{n+1}}$ para $|z-a| < |a|$;

   b) $z \mapsto \frac{1}{z^2}$ em torno de $a = 1$; r: $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n(z-1)^n$ para $|z-1| < 1$;

   c) $z \mapsto \frac{2z}{(z-1)(z-3)}$ em torno de $a = 2$;

   d) $z \mapsto z^3$ em torno de $a = 1$; r: $(z-1)^3 + 3(z-1)^2 + 3(z-1) + 1$ para todo o z;

   e) $z \mapsto \frac{e^z}{(z-a)}$ em torno de a; r: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!}(z-a)^{n-1}$ para $|z-a| > 0$;

   f) $z \mapsto \frac{1}{z^2-5z+6}$ em torno de $a = 1$; r: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)(z-1)^n$ para $|z-1| < 1$;

   g) $z \mapsto \log(z^2+2z+2)$ em torno de $a = -1$; r: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(z+1)^{2n+2}$ para $|z+1| < 1$.

3. Calcule

   a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4}\, dx = \frac{\pi}{2}$;

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$;

c) $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)(4+x^2)}\,dx = \frac{\pi}{6}$.

d) $\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-a}$;

e) $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; sugestão: integre ao longo de um contorno que contenha um terço de circunferência de raio R e dois segmentos de recta, de zero a R e de zero a $Re^{i2\pi/3}$.

4. Calcule o desenvolvimento em série de Laurent da função $f : \mathbb{C} \setminus \{1,2\} \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)}$:

   a) na região $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$; resposta: $\sum_{n=0}^{\infty}(2^{-(n+1)} - 1)z^n$;

   b) na região $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$; resposta: $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-(n+1)} + \frac{z^n}{2^{n+1}}$;

   c) na região $\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z|\}$; resposta: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-2^n}{z^{n+1}}$.

   d) Calcule $\int_{|z|=r} f(z)\,dz$ para $r = \frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ e $\frac{5}{2}$; r: 0, $2\pi i$ e 0.

5. Em que regiões se pode desenvolver em série $z \mapsto \frac{1}{z^4+4}$ em torno de $2+2i$? Resposta: Em 4 regiões, $|z-(2+2i)| < \sqrt{2}$, $\sqrt{2} < |z-(2+2i)| < \sqrt{10}$, $\sqrt{10} < |z-(2+2i)| < 3\sqrt{2}$ e $|z-(2+2i)| > 3\sqrt{2}$.

6. Calcule
$$\int_{|z|=1} z^2 \sin\frac{1}{z}\,dz,$$
com a circunferência descrita no sentido direto. Classifique as singularidades da função integrada. Resposta: $-\frac{\pi i}{3}$, singularidade essencial em 0.

7. Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \frac{\log(1-z)}{z^4}$, onde log designa o logaritmo principal.

   a) Desenvolva f em série de Laurent, em torno de 0. R: $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-4}}{n}$.

   b) Calcule $\int_{\partial\{z\in\mathbb{C}:|\Re z|<\frac{1}{2},\ |\Im z|<2\}} f(z)\,dz$, integrando e série de Laurent e usando a Fórmula Integral de Cauchy. R: $-\frac{2\pi i}{3}$.

Referências

[1] **L.V. Ahlfors**. Complex Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, 1979.

[2] **P.M. Girão**. Introdução à Análise Complexa, Séries de Fourier e Equações Diferenciais, IST Press, 2014.

[3] **L.T. Magalhães**. Análise Complexa em Uma Variável e Aplicações, IST, Fevereiro de 2004.

[4] **L.V. Pessoa**. Introdução à Análise Complexa, IST, Maio de 2008.