A

Introdução à Análise Complexa

4 de Novembro de 2024

LMAC

1º Teste	–	Perguntas 1 – 4	–	45 minutos
2º Teste	–	Perguntas 5 – 8	–	45 minutos
Exame	–	Todas as perguntas	–	90 minutos

Apresente os cálculos

1. Escreva na forma cartesiana $\exp\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)$ e $\log\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)$, onde o logaritmo é o principal. (2)

2. Esboce a imagem de $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ por $z \mapsto \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2$. Defina analiticamente o conjunto imagem. (3)

3. Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, definida por (3)

$$f(re^{i\theta}) = e^{2r}e^{i\theta}.$$

Estude a diferenciabilidade de f. Calcule a derivada de f nos pontos de diferenciabilidade, simplificando o resultado. A função f é prolongável por continuidade à origem? Justifique.

4. Descreva o lugar geométrico dos complexos z tais que (2)

$$\left|e^{\left(\frac{1-z}{z}\right)^2}\right| = 1.$$

5. Calcule a série de Laurent (todos os seus coeficientes) de $z \mapsto \frac{1}{z^2+1}$ em torno de i, indicando a região onde é válida. Classifique a singularidade $z = i$ e diga qual é o resíduo da função nessa singularidade. (3)

6. Calcule (3)

$$\int_{|z+1|=1} \frac{1}{(z+1)^2(z+3)^3}\, dz,$$

onde a circunferência é descrita no sentido directo.

7. Justifique que a função (2)

$$z \mapsto \int_0^{z^3} \sin(e^w)\, dw$$

está bem definida e que é uma função holomorfa. Calcule a sua derivada.

8. Considere o segmento de recta $L = \{z \in \mathbb{C} : \Im z = 0 \text{ e } \Re z \in [-1, 1]\}$, parametrizado da esquerda para a direita. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus L \to \mathbb{C}$, definida por (2)

$$f(z) = \int_L \frac{e^{\overline{w}}}{w - z}\, dw,$$

e $a \in \mathbb{C} \setminus L$. Justifique que f é holomorfa em a. Calcule a série de Taylor de f em torno de a, indicando a região onde é válida.

B

Introdução à Análise Complexa

4 de Novembro de 2024

LMAC

1º Teste	–	Perguntas 1 – 4	–	45 minutos
2º Teste	–	Perguntas 5 – 8	–	45 minutos
Exame	–	Todas as perguntas	–	90 minutos

Apresente os cálculos

1. Escreva na forma cartesiana $\exp(-1+i)$ e $\log(-1+i)$, onde o logaritmo é o principal. (2)

2. Esboce a imagem de $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ por $z \mapsto \sqrt{\frac{z+i}{z-i}}$, onde a raiz é a principal. Defina analiticamente o conjunto imagem. (3)

3. Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, definida por (3)

$$f(re^{i\theta}) = e^{3r} e^{i\theta}.$$

Estude a diferenciabilidade de f. Calcule a derivada de f nos pontos de diferenciabilidade, simplificando o resultado. A função f é prolongável por continuidade à origem? Justifique.

4. Descreva o lugar geométrico dos complexos z tais que (2)

$$\left| e^{\left(\frac{1+z}{z}\right)^2} \right| = 1.$$

5. Calcule a série de Laurent (todos os seus coeficientes) de $z \mapsto \frac{1}{z^2-1}$ em torno de -1, indicando a região onde é válida. Classifique a singularidade $z = -1$ e diga qual é o resíduo da função nessa singularidade. (3)

6. Calcule (3)

$$\int_{|z+3|=1} \frac{1}{(z+1)^3(z+3)^2}\, dz,$$

onde a circunferência é descrita no sentido directo.

7. Justifique que a função (2)

$$z \mapsto \int_1^{z^4} e^{\sin w}\, dw$$

está bem definida e que é uma função holomorfa. Calcule a sua derivada.

8. Considere o segmento de recta $L = \{z \in \mathbb{C} : \Im z = 0 \text{ e } \Re z \in [-1, 1]\}$, parametrizado da esquerda para a direita. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus L \to \mathbb{C}$, definida por (2)

$$f(z) = \int_L \frac{\sin \overline{w}}{w - z}\, dw,$$

e $a \in \mathbb{C} \setminus L$. Justifique que f é holomorfa em a. Calcule a série de Taylor de f em torno de a, indicando a região onde é válida.

C

Introdução à Análise Complexa

4 de Novembro de 2024

LMAC

1º Teste	–	Perguntas 1 – 4	–	45 minutos
2º Teste	–	Perguntas 5 – 8	–	45 minutos
Exame	–	Todas as perguntas	–	90 minutos

Apresente os cálculos

1. Escreva na forma cartesiana $\exp\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$ e $\log\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$, onde o logaritmo é o principal. (2)

2. Esboce a imagem de $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ por $z \mapsto \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2$. Defina analiticamente o conjunto imagem. (3)

3. Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, definida por (3)

$$f(re^{i\theta}) = e^{4r}e^{i\theta}.$$

Estude a diferenciabilidade de f. Calcule a derivada de f nos pontos de diferenciabilidade, simplificando o resultado. A função f é prolongável por continuidade à origem? Justifique.

4. Descreva o lugar geométrico dos complexos z tais que (2)

$$\left|e^{\left(\frac{1-iz}{z}\right)^2}\right| = 1.$$

5. Calcule a série de Laurent (todos os seus coeficientes) de $z \mapsto \frac{1}{z^2+4}$ em torno de $-2i$,[1] indicando a região onde é válida. Classifique a singularidade $z = -2i$ e diga qual é o resíduo da função nessa singularidade. (3)

6. Calcule (3)

$$\int_{|z+1|=2} \frac{1}{(z+1)^2(z+4)^2}\, dz,$$

onde a circunferência é descrita no sentido directo.

7. Justifique que a função (2)

$$z \mapsto \int_0^{z^5} \sin(e^{-w})\, dw$$

está bem definida e que é uma função holomorfa. Calcule a sua derivada.

8. Considere o segmento de recta $L = \{z \in \mathbb{C} : \Im z = 0 \text{ e } \Re z \in [-1,1]\}$, parametrizado da esquerda para a direita. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus L \to \mathbb{C}$, definida por (2)

$$f(z) = \int_L \frac{e^{-\overline{w}}}{w-z}\, dw,$$

e $a \in \mathbb{C} \setminus L$. Justifique que f é holomorfa em a. Calcule a série de Taylor de f em torno de a, indicando a região onde é válida.

[1] Por lapso, no enunciado estava $z = i$, as respostas com $z = i$, $z = 2i$ ou $z = -2i$ serão consideradas certas.

D

Introdução à Análise Complexa

4 de Novembro de 2024

LMAC

1º Teste	–	Perguntas 1 – 4	–	45 minutos
2º Teste	–	Perguntas 5 – 8	–	45 minutos
Exame	–	Todas as perguntas	–	90 minutos

Apresente os cálculos

1. Escreva na forma cartesiana $\exp(1-i)$ e $\log(1-i)$, onde o logaritmo é o principal. (2)

2. Esboce a imagem de $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ por $z \mapsto \sqrt{\frac{z-i}{z+i}}$, onde a raiz é a principal. Defina analiticamente o conjunto imagem. (3)

3. Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, definida por (3)

$$f(re^{i\theta}) = e^{5r} e^{i\theta}.$$

Estude a diferenciabilidade de f. Calcule a derivada de f nos pontos de diferenciabilidade, simplificando o resultado. A função f é prolongável por continuidade à origem? Justifique.

4. Descreva o lugar geométrico dos complexos z tais que (2)

$$\left| e^{\left(\frac{1+iz}{z}\right)^2} \right| = 1.$$

5. Calcule a série de Laurent (todos os seus coeficientes) de $z \mapsto \frac{1}{z^2-4}$ em torno de 2,[2] indicando a região onde é válida. Classifique a singularidade $z = 2$ e diga qual é o resíduo da função nessa singularidade. (3)

6. Calcule (3)

$$\int_{|z+4|=2} \frac{1}{(z+1)^2(z+4)^2}\, dz,$$

onde a circunferência é descrita no sentido directo.

7. Justifique que a função (2)

$$z \mapsto \int_1^{z^6} e^{-\sin w}\, dw$$

está bem definida e que é uma função holomorfa. Calcule a sua derivada.

8. Considere o segmento de recta $L = \{z \in \mathbb{C} : \Im z = 0 \text{ e } \Re z \in [-1, 1]\}$, parametrizado da esquerda para a direita. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus L \to \mathbb{C}$, definida por (2)

$$f(z) = \int_L \frac{\cos \overline{w}}{w - z}\, dw,$$

e $a \in \mathbb{C} \setminus L$. Justifique que f é holomorfa em a. Calcule a série de Taylor de f em torno de a, indicando a região onde é válida.

[2] Por lapso, no enunciado estava $z = -1$, as respostas com $z = -1$, $z = -2$ ou $z = 2$ serão consideradas certas.

A

Introdução à Análise Complexa

Exame - 4 de Novembro de 2024

LMAC

Resolução

1.

$$\exp\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) = \sqrt{e}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2} + i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\log\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) = \log\left(1e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = i\frac{\pi}{3}.$$

2. A imagem da circunferência $|z| = 1$ por $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ passa em 0 e em ∞, e é simétrica em relação ao eixo real (porque a circunferencia é simétrica em relação ao eixo imaginário, e o eixo imaginário é transformado no eixo real), ou seja, é o eixo imaginário. Como esta transformação de Möbius envia 0 em -1, a imagem do disco é o semiplano esquerdo.

Se $w = re^{i\theta}$, com $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, então $w^2 = r^2e^{2i\theta}$, onde $2\theta \in]\pi, 3\pi[$.

Logo, a imagem do disco pela transformação do enunciado é

$$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \Im z = 0 \text{ e } \Re z \leq 0\}.$$

3.

$$f_r = 2e^{2r}e^{i\theta}, \quad f_\theta = ie^{2r}e^{i\theta}, \quad -\frac{i}{r}f_\theta = \frac{e^{2r}}{r}e^{i\theta}.$$

Como f_r e f_θ são contínuas no domínio de f, f é $\mathbb{R}$-diferenciável (no seu domínio).

$$f_r = -\frac{i}{r}f_\theta \iff r = \frac{1}{2}.$$

$$f'\left(\frac{1}{2}e^{i\theta}\right) = e^{-i\theta}f_r = 2e.$$

A função não é prolongável por continuidade à origem porque

$$\lim_{r\to 0} f(re^{i\theta}) = e^{i\theta},$$

depende de θ.

4. Sejam $\xi = \frac{1-z}{z}$, $w = \xi^2$. Pretendemos saber em que região do plano complexo pode estar z quando $|e^w| = 1$.

$$|e^w| = 1 \Leftrightarrow \Re w = 0 \quad \Leftrightarrow w \text{ pertence ao eixo imaginário.}$$

$$w = \xi^2 \text{ pertence ao eixo imaginário } \Leftrightarrow$$
$$\xi \text{ pertence à união das bissectrizes dos quadrantes.}$$

$$\xi = \frac{1-z}{z} = \frac{1}{z} - 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{\xi+1}.$$

A imagem das união das bissectrizes dos quadrantes por $\xi \mapsto \frac{1}{\xi+1}$ é

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{1+i}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \left|z - \frac{1-i}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}\right\},$$

a união de duas circunferências de raio $\frac{\sqrt{2}}{2}$, uma com centro em $\frac{1+i}{2}$ e outra com centro em $\frac{1-i}{2}$.

5.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z-i)(z+i)} &= \frac{1}{(z-i)(z-i+2i)} \\
&= \frac{1}{2i(z-i)(\frac{z-i}{2i}+1)} \\
&= \frac{1}{2i(z-i)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-i}{2i}\right)^n \\
&= \frac{1}{2i(z-i)} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^{n-1}}{(2i)^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2i(z-i)} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-i)^n}{(2i)^{n+2}},
\end{aligned}$$

válido para $|z-i| < 2$. A função tem um pólo de primeira ordem no ponto i, sendo o resíduo nesse pólo igual a $\frac{1}{2i}$.

6.

$$\begin{aligned}
\int_{|z+1|=1} \frac{1}{(z+1)^2(z+3)^3}\,dz &= 2\pi i \frac{d}{dz}\frac{1}{(z+3)^3}\bigg|_{z=-1} \\
&= -\frac{6\pi i}{(z+3)^4}\bigg|_{z=-1} \\
&= -\frac{3\pi i}{8}.
\end{aligned}$$

7. A função $w \mapsto \sin(e^w)$ é inteira e o seu domínio, $\mathbb{C}$, é um conjunto simplesmente conexo. Pelo Teorema de Cauchy, o integral não depende da curva usada para ligar z a z^3. Logo, o integral está bem definido. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo a função integranda é a derivada de uma função holomorfa, F, e o integral vale $F(z^3) - F(0)$. A função $z \mapsto F(z^3)$ é holomorfa porque é a composição de duas funções holomorfas. Pela derivada da função composta, a sua derivada é $F'(z^3)3z^2 = 3z^2 \sin(e^{z^3})$.

8. Pela Regra de Leibniz,

$$\begin{aligned} f_x &= \int_L \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{\overline{w}}}{w-z}\,dw = \int_L \frac{e^{\overline{w}}}{(w-z)^2}\,dw, \\ f_y &= \int_L \frac{\partial}{\partial y} \frac{e^{\overline{w}}}{w-z}\,dw = i\int_L \frac{e^{\overline{w}}}{(w-z)^2}\,dw. \end{aligned}$$

Uma vez que as derivadas parciais f_x e f_y são contínuas e é satisfeita a equação de Cauchy-Riemann ($f_x = -if_y$), f é diferenciável no seu domínio.

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a}\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}},$$

válido para $|z-a| < |w-a|$. Isto implica que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_L \frac{e^{\overline{w}}}{(w-a)^{n+1}}\,dw \right) (z-a)^n,$$

válido para $|z-a|$ menor do que a distância de a a L.

B

Introdução à Análise Complexa

Exame - 4 de Novembro de 2024

LMAC

Resolução

1.

$$\exp(-1+i) = e^{-1}e^{i} = e^{-1}(\cos 1 + i\sin 1) = e^{-1}\cos 1 + ie^{-1}\sin 1,$$

$$\log(-1+i) = \log\left(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) = \frac{\ln 2}{2} + i\frac{3\pi}{4}.$$

2. A imagem da circunferência $|z| = 1$ por $z \mapsto \frac{z+i}{z-i}$ passa em 0 e em ∞, e é simétrica em relação ao eixo real (porque a circunferencia é simétrica em relação ao eixo imaginário, e o eixo imaginário é transformado no eixo real), ou seja, é o eixo imaginário. Como esta transformação de Möbius envia 0 em -1, a imagem do disco é o semiplano esquerdo.

Se $w = re^{i\theta}$, com $\theta \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$, então $\sqrt{w} = \sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}$, onde $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[$. Se $w = re^{i\theta}$, com $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, então $\sqrt{w} = \sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}$, onde $\frac{\theta}{2} \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Logo, a imagem do disco pela transformação do enunciado é

$$\{z \in \mathbb{C} : (\Re z > 0 \text{ e } \Im z < -\Re z) \text{ ou } (\Re z \geq 0 \text{ e } \Im z > \Re z)\}$$

$$= \{z \in \mathbb{C} : (\Re z > 0 \text{ e } |\Im z| > \Re z) \text{ ou } (\Re z = 0 \text{ e } \Im z > 0)\}.$$

3.

$$f_r = 3e^{3r}e^{i\theta}, \quad f_\theta = ie^{3r}e^{i\theta}, \quad -\frac{i}{r}f_\theta = \frac{e^{3r}}{r}e^{i\theta}.$$

Como f_r e f_θ são contínuas no domínio de f, f é $\mathbb{R}$-diferenciável (no seu domínio).

$$f_r = -\frac{i}{r}f_\theta \;\Leftrightarrow\; r = \frac{1}{3}.$$

$$f'\left(\frac{1}{3}e^{i\theta}\right) = e^{-i\theta}f_r = 3e.$$

A função não é prolongável por continuidade à origem porque

$$\lim_{r\to 0} f(re^{i\theta}) = e^{i\theta},$$

depende de θ.

4. Sejam $\xi = \frac{1+z}{z}$, $w = \xi^2$. Pretendemos saber em que região do plano complexo pode estar z quando $|e^w| = 1$.

$$|e^w| = 1 \;\Leftrightarrow\; \Re w = 0 \;\Leftrightarrow\; w \text{ pertence ao eixo imaginário.}$$

$$w = \xi^2 \text{ pertence ao eixo imaginário } \Leftrightarrow$$
$$\xi \text{ pertence à união das bissectrizes dos quadrantes.}$$
$$\xi = \frac{1+z}{z} = \frac{1}{z} + 1 \;\Leftrightarrow\; z = \frac{1}{\xi - 1}.$$

A imagem das união das bissectrizes dos quadrantes por $\xi \mapsto \frac{1}{\xi-1}$ é

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{-1+i}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\text{ ou }\; \left| z - \frac{-1-i}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \right\},$$

a união de duas circunferências de raio $\frac{\sqrt{2}}{2}$, uma com centro em $\frac{-1+i}{2}$ e outra com centro em $\frac{-1-i}{2}$.

5.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z+1)(z-1)} &= \frac{1}{(z+1)(z+1-2)} \\
&= -\frac{1}{2(z+1)(1-\frac{z+1}{2})} \\
&= -\frac{1}{2(z+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+1}{2} \right)^n \\
&= -\frac{1}{2(z+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^{n-1}}{2^{n+1}} \\
&= -\frac{1}{2(z+1)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^{n}}{2^{n+2}},
\end{aligned}$$

válido para $|z+1| < 2$. A função tem um pólo de primeira ordem no ponto -1, sendo o resíduo nesse pólo igual a $-\frac{1}{2}$.

6.

$$\begin{aligned}
\int_{|z+3|=1} \frac{1}{(z+1)^3(z+3)^2}\, dz &= 2\pi i \frac{d}{dz} \frac{1}{(z+1)^3} \bigg|_{z=-3} \\
&= -\frac{6\pi i}{(z+1)^4} \bigg|_{z=-3} \\
&= -\frac{3\pi i}{8}.
\end{aligned}$$

7. A função $w \mapsto e^{\sin w}$ é inteira e o seu domínio, $\mathbb{C}$, é um conjunto simplesmente conexo. Pelo Teorema de Cauchy, o integral não depende da curva usada para ligar z a z^3. Logo, o integral está bem definido. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo a função integranda é a derivada de uma função holomorfa, F, e o integral vale $F(z^4) - F(1)$. A função $z \mapsto F(z^4)$ é holomorfa porque é a composição de duas funções holomorfas. Pela derivada da função composta, a sua derivada é $F'(z^4)4z^3 = 4z^3 e^{\sin z^4}$.

8. Pela Regra de Leibniz,

$$\begin{aligned} f_x &= \int_L \frac{\partial}{\partial x} \frac{\sin \overline{w}}{w-z}\, dw = \int_L \frac{\sin \overline{w}}{(w-z)^2}\, dw, \\ f_y &= \int_L \frac{\partial}{\partial y} \frac{\sin \overline{w}}{w-z}\, dw = i \int_L \frac{\sin \overline{w}}{(w-z)^2}\, dw. \end{aligned}$$

Uma vez que as derivadas parciais f_x e f_y são contínuas e é satisfeita a equação de Cauchy-Riemann ($f_x = -i f_y$), f é diferenciável no seu domínio.

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{w-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}},$$

válido para $|z-a| < |w-a|$. Isto implica que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_L \frac{\sin \overline{w}}{(w-a)^{n+1}}\, dw \right) (z-a)^n,$$

válido para $|z-a|$ menor do que a distância de a a L.

C

Introdução à Análise Complexa

Exame - 4 de Novembro de 2024

LMAC

Resolução

1.

$$\exp\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right) = \sqrt{e}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2} - i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\log\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right) = \log\left(1e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) = -i\frac{\pi}{3}.$$

2.

3.

4. União de duas circunferências de raio $\frac{\sqrt{2}}{2}$, uma com centro em $\frac{1-i}{2}$ e outra com centro em $\frac{-1-i}{2}$.

5.

6.

$$\begin{aligned}\int_{|z+1|=2} \frac{1}{(z+1)^2(z+4)^2}\,dz &= 2\pi i \frac{d}{dz}\frac{1}{(z+4)^2}\bigg|_{z=-1} \\ &= -\frac{4\pi i}{27}.\end{aligned}$$

7. $5z^4\sin(e^{-z^5})$.

8.

D

Introdução à Análise Complexa

Exame - 4 de Novembro de 2024

LMAC

Resolução

1.

$$\exp(1-i) = ee^{-i} = e(\cos 1 - i\sin 1) = e\cos 1 - ie\sin 1,$$

$$\log(1-i) = \log\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{\ln 2}{2} - i\frac{\pi}{4}.$$

2.

3.

4. União de duas circunferências de raio $\frac{\sqrt{2}}{2}$, uma com centro em $\frac{1+i}{2}$ e outra com centro em $\frac{-1+i}{2}$.

5.

6.

$$\begin{aligned}\int_{|z+4|=2} \frac{1}{(z+1)^2(z+4)^2}\,dz &= 2\pi i \frac{d}{dz}\frac{1}{(z+1)^2}\bigg|_{z=-4} \\ &= \frac{4\pi i}{27}.\end{aligned}$$

7. $6z^5 e^{-\sin(z^6)}$.

8.