A

Introdução à Análise Complexa

10 de Novembro de 2023

LMAC

1º Teste	–	Perguntas 1 – 3	–	45 minutos
2º Teste	–	Perguntas 4 – 6	–	45 minutos
Exame	–	Todas as perguntas	–	90 minutos

Apresente os cálculos

1. Esboce a região (3)

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re z < 1\}$$

e a sua imagem por $z \mapsto \frac{z+i}{z-i}$.

2. Estude a diferenciabilidade de (5)

$$z \mapsto e^{|z|^2} - e|z|^2,$$

e calcule a derivada nos pontos onde existe.

3. Considere a transformação (2)

$$z \mapsto \log(z(z-1)),$$

onde o logaritmo é o principal. Determine o conjunto onde o Teorema da Derivada da Função Composta garante que a transformação é diferenciável. Esboce o complementar do conjunto.

4. Calcule (5)

$$\int_{|z+i|=\frac{1}{2}} \frac{\log z}{(z^2+1)(z^2+4)^2}\, dz,$$

onde o logaritmo é o principal e a circunferência é descrita no sentido directo, simplificando o resultado. Classifique as singularidades isoladas da função integranda.

5. Esboce uma curva regular e conexa γ tal que (3)

$$\int_\gamma \left(\frac{5}{z-1} + \frac{3}{z-5}\right) dz = 2\pi i.$$

6. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, definida por (2)

$$f(z) = z e^{e^{\frac{2}{z}}}.$$

Calcule três termos não nulos da sua série de Laurent em torno de $z = 0$. Classifique a singularidade $z = 0$. Qual o resíduo da função na origem?

B

Introdução à Análise Complexa

10 de Novembro de 2023

LMAC

1º Teste	–	Perguntas $1-3$	–	45 minutos
2º Teste	–	Perguntas $4-6$	–	45 minutos
Exame	–	Todas as perguntas	–	90 minutos

Apresente os cálculos

1. Esboce a região (3)

$$\{z \in \mathbb{C} : -1 < \Re z < 0\}$$

e a sua imagem por $z \mapsto \frac{z+i}{z-i}$.

2. Estude a diferenciabilidade de (5)

$$z \mapsto \cos\left(|z|^2\right),$$

e calcule a derivada nos pontos onde existe.

3. Considere a transformação (2)

$$z \mapsto \log(z(z-i)),$$

onde o logaritmo é o principal. Determine o conjunto onde o Teorema da Derivada da Função Composta garante que a transformação é diferenciável. Esboce o complementar do conjunto.

4. Calcule (5)

$$\int_{|z+2i|=\frac{1}{2}} \frac{\log z}{(z^2+1)^2(z^2+4)}\, dz,$$

onde o logaritmo é o principal e a circunferência é descrita no sentido directo, simplificando o resultado. Classifique as singularidades isoladas da função integranda.

5. Esboce uma curva regular e conexa γ tal que (3)

$$\int_\gamma \left(\frac{7}{z-1} + \frac{3}{z-5}\right) dz = 2\pi i.$$

6. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, definida por (2)

$$f(z) = z e^{2e^{\frac{1}{z}}}.$$

Calcule três termos não nulos da sua série de Laurent em torno de $z = 0$. Classifique a singularidade $z = 0$. Qual o resíduo da função na origem?

A

Introdução à Análise Complexa

Exame - 10 de Novembro de 2023

LMAC

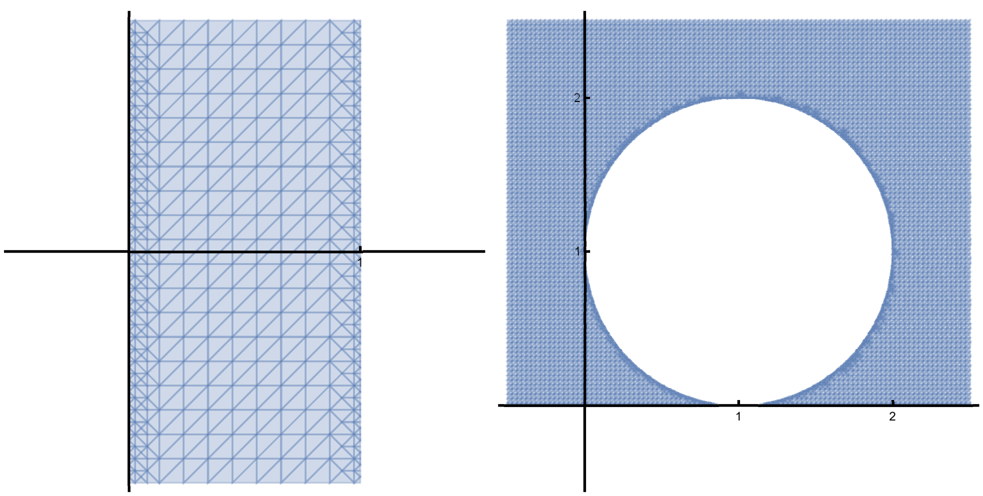
Resolução

1. A imagem do eixo imaginário é o eixo real porque o quociente de dois imaginários puros é um número real.

A imagem de $\{\Re z = 1\}$ é uma circunferência, porque esta recta não contém o ponto i.

$$\begin{aligned} \infty &\mapsto 1, \\ 1 &\mapsto i, \\ \frac{1}{2}+i &\mapsto 1+4i. \end{aligned}$$

Uma vez que a circunferência contém os pontos 1 e i e tem que ser tangente ao eixo real, trata-se da circunferência $|z-(1+i)| = 1$.



Observação: Se $|x_0|$ é muito grande, a imagem da recta $\{\Re z = x_0\}$ é uma circunferência, tangente ao eixo real no ponto 1, de raio muito pequeno, porque todos os pontos da recta têm módulo muito grande e têm imagem muito perto de 1.

Nota:

$$\begin{aligned} 1+i &\mapsto 1+2i, \\ 1+2i &\mapsto 2+i. \end{aligned}$$

2. $f(x+iy) = e^{x^2+y^2} - e(x^2+y^2)$.

$$f_x = 2x\left(e^{x^2+y^2} - e\right),$$
$$f_y = 2y\left(e^{x^2+y^2} - e\right), \; -if_y = -2iy\left(e^{x^2+y^2} - e\right).$$

f_x e f_y são contínuas em $\mathbb{C}$. Logo f é $\mathbb{R}$-diferenciável em $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} f_x = -if_y \;&\Leftrightarrow\; 2x\left(e^{x^2+y^2} - e\right) = -2iy\left(e^{x^2+y^2} - e\right) \\ &\Leftrightarrow\; x = y = 0 \;\vee\; x^2+y^2 = 1. \end{aligned}$$

A função é diferenciável na origem e na circunferência de raio 1 centrada na origem. A derivada é

$$f'(0) = f_x(0) = 0, \quad f'(e^{i\theta}) = f_x(e^{i\theta}) = 0.$$

3. O Teorema da Derivada da Função Composta não garante que a transformação é diferenciável no conjunto de pontos z tais que $z(z-1) \in \mathbb{R}_0^-$, ou seja

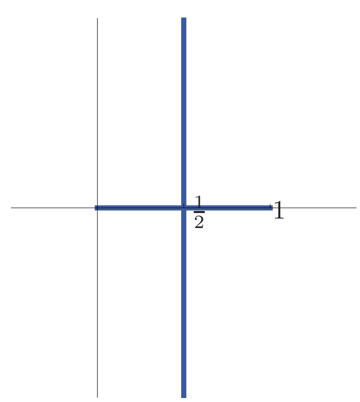
$$z(z-1) = t \in \mathbb{R}_0^-.$$

Resolvendo em ordem a z, obtém-se

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1+4t}}{2}.$$

Quando t pertence a $\mathbb{R}_0^-$, $1+4t$ é um real menor ou igual a 1. Logo, $\pm\sqrt{1+4t}$ pertence à união do eixo imaginário com o segmento no eixo real compreendido entre -1 e 1. Assim, o Teorema da Derivada da Função Composta garante que a transformação é diferenciável no conjunto

$$\mathbb{C} \setminus \left\{x+iy \in \mathbb{C} : x = \frac{1}{2} \text{ ou } (y = 0 \wedge 0 \le x \le 1)\right\}.$$



4. Aplica-se a fórmula integral de Cauchy,

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a),$$

com $f(z) = \frac{\log z}{(z-i)(z^2+4)^2}$, $a=-i$, $n=0$ e $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : -2 < \Im z < 0\}$. Usando o facto de

$$\log(-i) = \log\left(e^{-i\frac{\pi}{2}}\right) = -i\frac{\pi}{2},$$

obtém-se

$$\begin{aligned}\int_{|z+i|=\frac{1}{2}} \frac{\log z}{(z^2+1)(z^2+4)^2}\,dz &= 2\pi i \left.\frac{\log z}{(z-i)(z^2+4)^2}\right|_{z=-i} \\ &= -\frac{\pi}{9}\left(-i\frac{\pi}{2}\right) = i\frac{\pi^2}{18}.\end{aligned}$$

A função integranda tem pólos simples em i e $-i$, e tem pólos duplos em $2i$ e $-2i$.

5. Tem-se

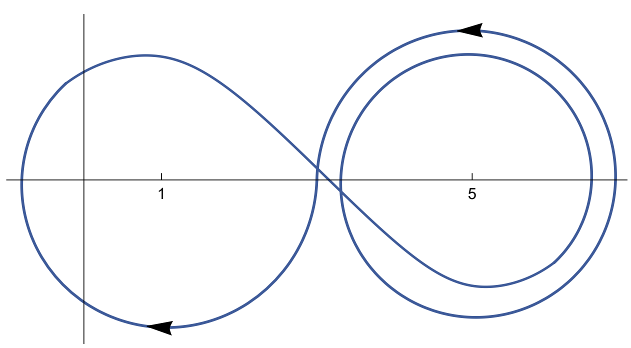
$$\int_\gamma \left(\frac{5}{z-1} + \frac{3}{z-5}\right) dz = 2\pi i\Big(5n(\gamma,1) + 3n(\gamma,5)\Big).$$

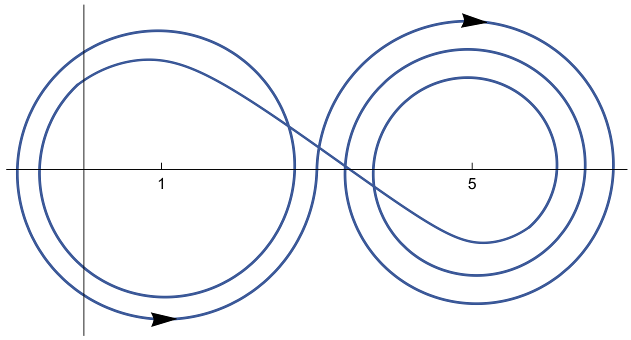
Para o integral valer $2\pi i$, deve ter-se $5n(\gamma,1) + 3n(\gamma,5) = 1$. Podemos escolher, por exemplo,

$$\begin{gathered} n(\gamma,1) = -1 \quad \text{e} \quad n(\gamma,5) = 2, \\ \text{ou} \\ n(\gamma,1) = 2 \quad \text{e} \quad n(\gamma,5) = -3. \end{gathered}$$

Mais geralmente, poderia tomar-se

$$n(\gamma,1) = -1+3k \quad \text{e} \quad n(\gamma,5) = 2-5k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$





6. Seja

$$g(w) = e^{e^{2w}}.$$

Tem-se

$$\begin{array}{ll} & g(0) = e, \\ g'(w) = e^{e^{2w}} 2e^{2w}, & g'(0) = 2e, \\ g''(w) = e^{e^{2w}} (2e^{2w})^2 + e^{e^{2w}} 4e^{2w}, & g''(0) = 8e. \end{array}$$

Logo, a série de Taylor de g em torno da origem é

$$g(w) = e + 2ew + 4ew^2 + \dots,$$

tendo-se igualdade para todo o w. A função f pode ser escrita em termos de g como

$$f(z) = zg\left(\frac{1}{z}\right) = ez + 2e + 4e\frac{1}{z} + \dots,$$

para z diferente de 0. Portanto, f tem uma singularidade essencial em $z = 0$, sendo o seu resíduo na origem igual a $4e$.

B

Introdução à Análise Complexa

Exame - 10 de Novembro de 2023

LMAC

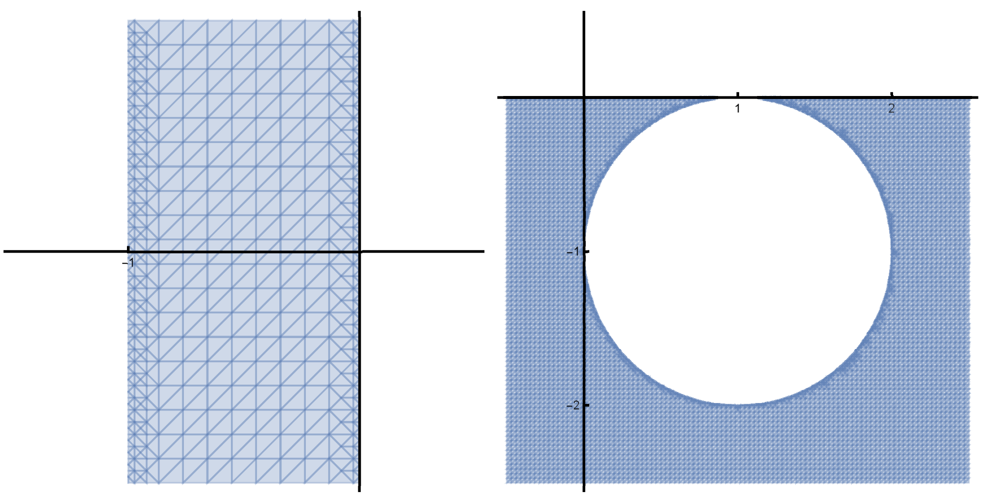
Resolução

1. A imagem do eixo imaginário é o eixo real porque o quociente de dois imaginários puros é um número real.

A imagem de $\{\Re z = -1\}$ é uma circunferência, porque esta recta não contém o ponto i.

$$\begin{aligned} \infty &\mapsto 1, \\ -1 &\mapsto -i, \\ -\frac{1}{2}+i &\mapsto 1-4i. \end{aligned}$$

Uma vez que a circunferência contém os pontos 1 e $-i$ e tem que ser tangente ao eixo real, trata-se da circunferência $|z-(1-i)| = 1$.



Observação: Se $|x_0|$ é muito grande, a imagem da recta $\{\Re z = x_0\}$ é uma circunferência, tangente ao eixo real no ponto 1, de raio muito pequeno, porque todos os pontos da recta têm módulo muito grande e têm imagem muito perto de 1.

Nota:

$$\begin{aligned} -1+i &\mapsto 1-2i, \\ -1+2i &\mapsto 2-i. \end{aligned}$$

2. $f(x+iy) = \cos(x^2+y^2)$.

$$\begin{aligned} f_x &= -2x\sin(x^2+y^2), \\ f_y &= -2y\sin(x^2+y^2),\ -if_y = 2iy\sin(x^2+y^2). \end{aligned}$$

f_x e f_y são contínuas em $\mathbb{C}$. Logo f é $\mathbb{R}$-diferenciável em $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} f_x = -if_y \quad &\Leftrightarrow \quad -2x\sin(x^2+y^2) = 2iy\sin(x^2+y^2) \\ &\Leftrightarrow \quad x = y = 0 \ \vee \ x^2+y^2 = k\pi,\ k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

A função é diferenciável na origem e nas circunferências de raio $\sqrt{k\pi}$, centradas na origem. A derivada é

$$f'(0) = f_x(0) = 0, \quad f'\left(\sqrt{k\pi}e^{i\theta}\right) = f_x\left(\sqrt{k\pi}e^{i\theta}\right) = 0.$$

3. O Teorema da Derivada da Função Composta não garante que a transformação é diferenciável no conjunto de pontos z tais que $z(z-i) \in \mathbb{R}_0^-$, ou seja

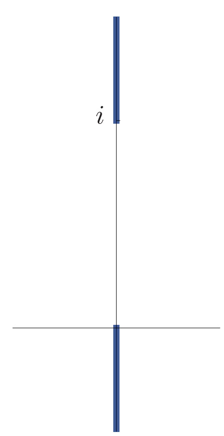
$$z(z-i) = t \in \mathbb{R}_0^-.$$

Resolvendo em ordem a z, obtém-se

$$z = \frac{i \pm \sqrt{-1+4t}}{2}.$$

Quando t pertence a $\mathbb{R}_0^-$, $-1+4t$ é um real menor ou igual a -1. Logo, $\pm\sqrt{1+4t}$ pertence à intersecção do eixo imaginário com o exterior da bola aberta de raio um centrada na origem. Assim, o Teorema da Derivada da Função Composta garante que a transformação é diferenciável no conjunto

$$\mathbb{C} \setminus \{x+iy \in \mathbb{C} : x = 0 \wedge (y \leq 0 \text{ ou } y \geq 1)\}.$$



4. Aplica-se a fórmula integral de Cauchy,

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a),$$

com $f(z) = \frac{\log z}{(z-2i)(z^2+1)^2}$, $a = -2i$, $n = 0$ e $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Im z < -1\}$. Usando o facto de

$$\log(-2i) = \log\left(2e^{-i\frac{\pi}{2}}\right) = \ln 2 - i\frac{\pi}{2},$$

obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{|z+2i|=\frac{1}{2}} \frac{\log z}{(z^2+1)^2(z^2+4)}\,dz &= 2\pi i\, \frac{\log z}{(z-2i)(z^2+1)^2}\bigg|_{z=-2i} \\ &= -\frac{\pi}{2}\frac{1}{9}\left(\ln 2 - i\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{18}\ln 2 + i\frac{\pi^2}{36}. \end{aligned}$$

A função integranda tem pólos simples em $2i$ e $-2i$, e tem pólos duplos em i e $-i$.

5. Tem-se

$$\int_\gamma \left(\frac{7}{z-1} + \frac{3}{z-5}\right) dz = 2\pi i\Big(7n(\gamma,1) + 3n(\gamma,5)\Big).$$

Para o integral valer $2\pi i$, deve ter-se $7n(\gamma,1) + 3n(\gamma,5) = 1$. Podemos escolher, por exemplo,

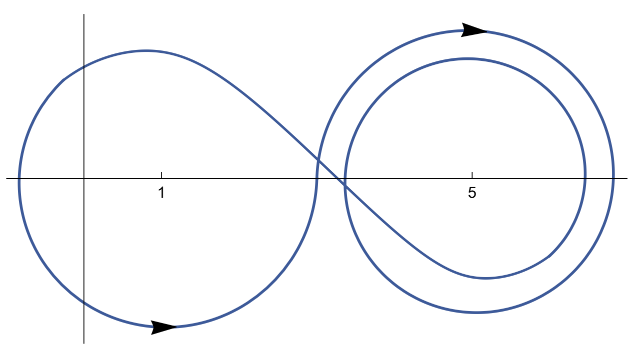
$$n(\gamma,1) = 1 \quad \text{e} \quad n(\gamma,5) = -2,$$

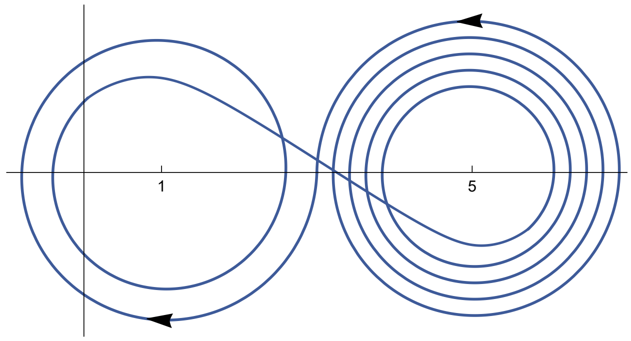
$$\text{ou}$$

$$n(\gamma,1) = -2 \quad \text{e} \quad n(\gamma,5) = 5.$$

Mais geralmente, poderia tomar-se

$$n(\gamma,1) = 1-3k \quad \text{e} \quad n(\gamma,5) = -2+7k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$





6. Seja
$$g(w) = e^{2e^w}.$$

Tem-se
$$\begin{aligned} & & g(0) &= e^2, \\ g'(w) &= e^{2e^w} 2e^w, & g'(0) &= 2e^2, \\ g''(w) &= e^{2e^w}(2e^w)^2 + e^{2e^w} 2e^w, & g''(0) &= 6e^2. \end{aligned}$$

Logo, a série de Taylor de g em torno da origem é
$$g(w) = e^2 + 2e^2 w + 3e^2 w^2 + \dots,$$

tendo-se igualdade para todo o w. A função f pode ser escrita em termos de g como
$$f(z) = zg\left(\frac{1}{z}\right) = e^2 z + 2e^2 + 3e^2 \frac{1}{z} + \dots,$$

para z diferente de 0. Portanto, f tem uma singularidade essencial em $z = 0$, sendo o seu resíduo na origem igual a $3e^2$.