Introdução à Análise Complexa

18 de Novembro de 2022

LMAC

1º Teste –	Perguntas 1 – 4	– 1 hora
2º Teste –	Perguntas 5 – 7	– 1 hora
Exame –	Todas as perguntas	– 2 horas

Apresente os cálculos

1. Esboce os conjuntos A e B e as suas imagens pela aplicação $z \mapsto \log z$, onde o logaritmo é o principal.

a) $A = \{re^{i\theta} \in \mathbb{C} : 0 < \theta < \pi \text{ e } 1 < r < e^{\frac{\pi}{4}}\}$. (2)

b) $B = \{re^{i\theta} \in \mathbb{C} : 0 < \theta < \pi \text{ e } e^{\frac{\theta}{4}} < r < e^{\frac{\pi}{4}}\}$. (1)

2. Determine o conjunto dos pontos onde a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por (2.5)

$$f(x+iy) = -xe^{iy} + ixe^{-iy}$$

é diferenciável. Calcule a derivada de f nesses pontos, simplificando o resultado.

3. Sejam $\log(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta$ com $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ e f a função definida no seu domínio natural por

$$f(z) = \frac{\log z}{(z^2+1)^2}.$$

Identifique o domínio de diferenciabilidade de f. Calcule os dois primeiros termos do desenvolvimento de f em série de Laurent em torno do ponto i, identificando a região onde este é válido. Classifique a singularidade $z = i$. (2.5)

4. Quais as circunferências que são invariantes pela transformação $z \mapsto \frac{1}{z}$? Justifique. (2)

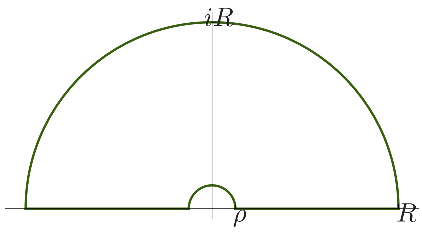
5. Considere
$$I := \int_\gamma \frac{1}{(w-1)(w-2)}\,dw.$$

a) Calcule I quando $\gamma = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}\right\}$, percorrida no sentido directo. (2)

b) Calcule I quando $\gamma = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}\right\}$, percorrida no sentido directo. (2)

c) Seja $z \in \mathbb{C} \setminus \{1,2\}$. A função (1)
$$z \mapsto \int_\gamma \frac{1}{(w-1)(w-2)}\,dw,$$
onde γ é uma curva contida em $\mathbb{C} \setminus \{1,2\}$ que une o ponto 0 ao ponto z, está bem definida? Justifique.

6. Sejam $0 < \rho < 1 < R$, γ a fronteira de região
$$\{z \in \mathbb{C} : \rho < |z| < R \text{ e } \Im z > 0\}$$
percorrida no sentido directo, $\log(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta$ com $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ e f a função definida no seu domínio natural por
$$f(z) = \frac{\log z}{(z^2+1)^2}.$$



a) Calcule $\oint\limits_\gamma f(z)\,dz$. (2)

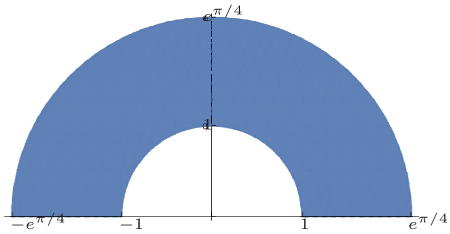
b) Calcule (1)
$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\substack{|z|=R,\\ \Im z>0}} f(z)\,dz \qquad \text{e} \qquad \lim_{\rho\to 0} \int\limits_{\substack{|z|=\rho,\\ \Im z>0}} f(z)\,dz.$$

c) Seja L o segmento de recta $\{z \in \mathbb{C} : z = x + i0 \text{ com } x \in [-R, -\rho]\}$ percorrido da esquerda para a direita. Parametrizando L, relacione o integral $\int_L f(z)\,dz$ com o integral $\int_\rho^R f(x)\,dx$. Calcule $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$. (1)

7. Seja f uma função inteira, com contradomínio contido em $\{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$. Use o Teorema de Liouville para mostrar que f é constante. (1)

1. Recordemos que a função logaritmo principal é definida por $\log(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta$, para $r > 0$ e $\theta \in (-\pi, \pi]$.

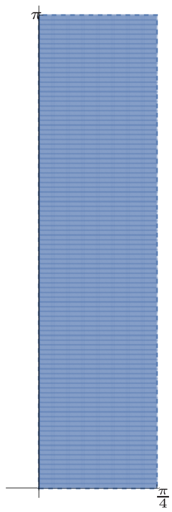
a) Esboço do conjunto A:



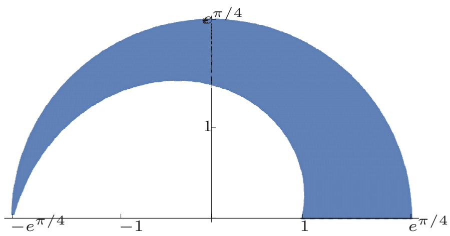
Tem-se

$$0 < \Im \log z = \theta < \pi, \qquad 0 < \Re \log z = \ln r < \frac{\pi}{4}.$$

Esboço de $\log A$:



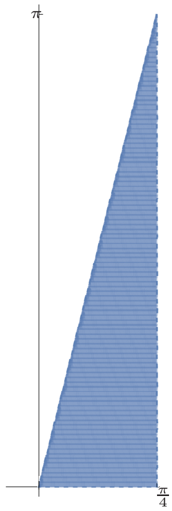
b) Esboço do conjunto B:



Tem-se

$$0 < \Im \log z = \theta < \pi, \qquad \frac{\Im \log z}{4} = \frac{\theta}{4} < \Re \log z = \ln r < \frac{\pi}{4}.$$

Esboço de $\log B$:



2. As derivadas parciais de f são

$$\begin{aligned} f_x &= -e^{iy} + ie^{-iy}, \\ f_y &= -ixe^{iy} + xe^{-iy}, \\ -if_y &= -xe^{iy} - ixe^{-iy}. \end{aligned}$$

Como f_x e f_y são contínuas, f é $\mathbb{R}$-diferenciável. Portanto, f é diferenciável nos pontos em que satisfizer a equação de Cauchy-Riemann.

$$\begin{aligned} f_x = -if_y \quad &\Leftrightarrow \quad (x-1)e^{iy} = -i(x+1)e^{-iy} \\ &\Leftrightarrow \quad e^{2iy} = i\frac{1+x}{1-x}. \end{aligned}$$

O primeiro membro tem módulo igual a 1, pelo que o segundo membro também tem que ter módulo igual a 1. A fracção $\frac{1+x}{1-x}$ nunca assume o valor -1. Assume o valor 1 quando $x = 0$. Por outro lado $e^{2iy} = i$ quando $2y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ou seja, $y = \frac{\pi}{4} + k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$. Assim, o conjunto dos pontos de diferenciabilidade da função é

$$\{(0, \tfrac{\pi}{4} + k\pi) = i(\tfrac{\pi}{4} + k\pi), k \in \mathbb{Z}\}.$$

Nestes pontos, $f' = -if_y = 0$.

3. O domínio natural da função é $\mathbb{C} \setminus \{0, \pm i\}$. O logaritmo é diferenciável em $D := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z = 0 + iy \text{ com } y \in \mathbb{R}_0^-\}$. Em $D \setminus \{i\}$ a função f é diferenciável (porque é o quociente de funções diferenciáveis, e o divisor não se anula). Os pontos 0 e $\pm i$ não pertencem ao domínio de diferenciabilidade da função porque não pertencem ao domínio da função. Em $\{z \in \mathbb{C} : z = 0 + iy \text{ com } y \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)\}$ a função f não é diferenciável (porque se fosse, então $\log z = (z^2+1)^2 f(z)$ seria diferenciável). Podemos escrever

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2} g(z), \quad \text{com } g(z) = \frac{\log z}{(z+i)^2}.$$

$$g(z) = g(i) + g'(i)(z-i) + \frac{g''(i)}{2!}(z-i)^2 + \dots \quad \text{para } |z-i| < 1.$$

Uma vez que

$$g(i) = \frac{i\pi/2}{(2i)^2} = -i\frac{\pi}{8}$$

e

$$g'(i) = \left(\frac{1}{z(z+i)^2} - \frac{2\log z}{(z+i)^3}\right)\bigg|_{z=i} = \frac{1}{i(2i)^2} - \frac{2i\pi/2}{(2i)^3} = \frac{i}{4} + \frac{\pi}{8},$$

tem-se

$$f(z) = \frac{-i\pi/8}{(z-i)^2} + \frac{\pi + 2i}{8(z-i)} + \frac{g''(i)}{2} + \dots,$$

válido para $0 < |z-i| < 1$. A função f tem um polo de segunda ordem no ponto $z = i$.

4. Comecemos por focar a nossa atenção em circunferências com centro no eixo real. Seja γ uma circunferência que é invariante por $z \mapsto \frac{1}{z}$ e seja x_0 um ponto de intersecção de γ com o eixo real. Obviamente, x_0 tem que ser não nulo. Como γ é invariante, $\frac{1}{x_0} \in \gamma$. Se x_0 não é ± 1, então $\frac{1}{x_0} \neq x_0$. Seja $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ e γ a circunferência com centro no eixo real que o intersecta em x_0 e $\frac{1}{x_0}$. Claramente, γ é invariante por $z \mapsto \frac{1}{z}$. A circunferência centrada na origem de raio 1 também é invariante por $z \mapsto \frac{1}{z}$.

Analisemos agora o caso de uma circunferência γ com centro num ponto p pertencente a uma recta que passe na origem que não seja o eixo real, digamos fazendo um ângulo $\theta_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ com o eixo real. Suponhamos que p não é a origem e que a circunferência não passa na origem. Então, a imagem da circunferência γ tem centro na recta que faz um ângulo $-\theta_0$ com o eixo real. Como $p \neq 0$ a imagem de γ não pode coincidir com γ.

Conclusão: as as circunferências que são invariantes por $z \mapsto \frac{1}{z}$ são as que têm centro no eixo real e (i) o intersectam em -1 e 1; (ii) o intersectam em x_0 e $\frac{1}{x_0}$ onde $x_0 > 1$ ou $x_0 < -1$.

5.

a) Aplicando a fórmula integral de Cauchy em $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Re z < 2\}$, obtém-se

$$\int_{|z-\frac{3}{4}|=\frac{3}{4}} \frac{1/(w-2)}{w-1}\, dw = 2\pi i \left.\frac{1}{w-2}\right|_{w=1} = -2\pi i.$$

b) Uma vez que a função integranda é holomorfa em

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{3}{2}\right| < \frac{3}{2} \ \wedge\ |z-1| > \frac{1}{4} \ \wedge\ |z-2| > \frac{1}{4}\right\},$$

tem-se

$$\begin{aligned}
&\int_{|z-\frac{3}{2}|=\frac{3}{2}} \frac{1}{(w-1)(w-2)}\, dw \\
&= \int_{|z-1|=\frac{1}{4}} \frac{1}{(w-1)(w-2)}\, dw + \int_{|z-2|=\frac{1}{4}} \frac{1}{(w-1)(w-2)}\, dw.
\end{aligned}$$

O primeiro integral do segundo membro tem um valor igual ao calculado na alínea **a)**. Aplicando a fórmula integral de Cauchy em $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 1\}$, o segundo integral do segundo membro vale $2\pi i$. Conclui-se que o integral no enunciado vale 0.

c) A função

$$z \mapsto \int_\gamma \frac{1}{(w-1)(w-2)}\, dw,$$

onde γ é uma curva contida em $\mathbb{C} \setminus \{1,2\}$ que une o ponto 0 ao ponto z, não está bem definida porque depende da curva γ. Por exemplo, seja $z = 0$, $\gamma_1 = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}\right\}$, percorrida no sentido directo e γ_2 o caminho trivial constante. Então,

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{(w-1)(w-2)}\, dw = -2\pi i \neq 0 = \int_{\gamma_2} \frac{1}{(w-1)(w-2)}\, dw.$$

6.

a) Usando a fórmula integral de Cauchy com $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z = 0 + iy \text{ com } y \in \mathbb{R}_0^-\}$, $a = i$, $n = 1$, obtém-se

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{\log z}{(z^2+1)^2}\,dz &= 2\pi i \left.\frac{d}{dz}\frac{\log z}{(z+i)^2}\right|_{z=i} \\
&= 2\pi i \left.\left(\frac{1}{z(z+i)^2} - \frac{2\log z}{(z+i)^3}\right)\right|_{z=i} \\
&= 2\pi \frac{1}{(2i)^2} - 2\pi i \frac{2i\pi/2}{(2i)^3} \\
&= -\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\substack{|z|=R,\\ \Im z>0}} \frac{\log z}{(z^2+1)^2}\,dz\right| &\le \int_{\substack{|z|=R,\\ \Im z>0}} \frac{\ln R + \pi}{(R^2-1)^2}\,|dz| \\
&= \frac{\pi R(\ln R + \pi)}{(R^2-1)^2} \longrightarrow 0, \quad \text{quando } R \to \infty,
\end{aligned}$$

porque $\frac{\ln R}{R} \to 0$, quando $R \to \infty$.

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\substack{|z|=\rho,\\ \Im z>0}} \frac{\log z}{(z^2+1)^2}\,dz\right| &\le \int_{\substack{|z|=\rho,\\ \Im z>0}} \frac{|\ln \rho| + \pi}{(1-\rho^2)^2}\,|dz| \\
&= \frac{\pi \rho(|\ln \rho| + \pi)}{(1-\rho^2)^2} \longrightarrow 0, \quad \text{quando } \rho \to 0,
\end{aligned}$$

porque

$$\lim_{\rho\to 0} \rho \ln \rho = \lim_{\rho \to 0} \frac{\ln \rho}{1/\rho} = \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{-1/\rho^2} = 0.$$

c) Usemos $z(x) = -x$ com $x \in [\rho, R]$ para parametrizar $-L$, ou seja para parametrizar L percorrido no sentido inverso.

$$\begin{aligned}
\int_L f(z)\,dz &= -\int_\rho^R f(-x)d(-x) = \int_\rho^R f(xe^{i\pi})dx \\
&= \int_\rho^R \frac{\log x}{(x^2+1)^2}\,dx + i\pi \int_\rho^R \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
-\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi^2}{4} &= 2\int_\rho^R \frac{\log x}{(x^2+1)^2}\,dx + i\pi\int_\rho^R \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx \\
&\quad + \int_{\substack{|z|=R,\\ \Im z>0}} f(z)\,dz + \int_{\substack{|z|=\rho,\\ \Im z>0}} f(z)\,dz.
\end{aligned}$$

Fazendo ρ e R tenderem para 0 e $+\infty$, respectivamente, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2+1)^2}\,dx &= -\frac{\pi}{4}, \\ \int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

7. A função $z \mapsto e^{-f(z)}$ é inteira e limitada. Com efeito, o contradomínio de $z \mapsto \eta = e^{-f(z)}$ está contido em $\{\eta \in \mathbb{C} : |\eta| < 1\}$. Pelo Teorema de Liouville, é constante, digamos $r_0 e^{i\theta_0}$ para algum $r_0 > 0$. Assim $\Re(-f(z)) = \ln r_0$ e $\Im(-f(z)) = \theta_0 + 2k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$. Atendendo a que $z \mapsto -f(z)$ é uma função contínua, existe um $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\Im(-f(z)) = \theta_0 + 2k_0\pi$. Conclui-se que

$$z \mapsto -f(z) = \Re(-f(z)) + i\Im(-f(z)) = \ln r_0 + i(\theta_0 + 2k_0\pi)$$

é constante, e portanto que f é constante.