Cálculo Diferencial e Integral III

Repescagem do 3º Mini-Teste - 17 de Janeiro de 2024

LEAer

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Seja $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Considere o campo

$$F(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{r}.$$

Note que a potência de r no denominador é igual a um. Fixem-se $R_2 > R_1 > 0$. Considere a região

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : R_1 < \|(x, y, z)\| < R_2\right\}.$$

- **a)** Calcule directamente o fluxo de F através das esferas centradas na origem de raios R_1 e R_2. (3)
- **b)** Calcule a divergência de F. (3)
- **c)** Verifique a igualdade do Teorema da Divergência para $\iiint_\Omega \operatorname{div} F \, dV$. (4)

2. Seja (A, B, C) um vector de $\mathbb{R}^3$. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o campo constante tal que $F(x, y, z) = (A, B, C)$.

- **a)** Use a fórmula para um potencial vector de um campo solenoidal num conjunto em estrela com centro em zero para calcular um potencial vector D de F. (2)
- **b)** Calcule um potencial vector $\tilde{D}$ de F com terceira componente nula. Identifique o potencial escalar do campo $\tilde{D} - D$. (4)

3. Seja $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Tem-se (4)

$$(\partial_x, \partial_y, \partial_z) \times \left(-\frac{y}{r\,(r+z)}, \frac{x}{r\,(r+z)}, 0\right) = \frac{(x, y, z)}{r^3} =: f(x, y, z).$$

Use o Teorema de Stokes para calcular o fluxo de f através da esfera de raio R centrada na origem, no sentido da normal exterior.

Cálculo Diferencial e Integral III

Repescagem do 3º Mini-Teste - 17 de Janeiro de 2024

LEAer

Resolução

1.

a) Tendo em atenção que sobre uma superfície esférica centrada na origem $F = n$, tem-se

$$\iint_{\|(x,y,z)\|=R} F \cdot n \, dS = \iint_{\|(x,y,z)\|=R} 1 \, dS = 4\pi R^2.$$

b)

$$\partial_x F_1 = \partial_x \frac{x}{r} = \frac{1}{r} - \frac{x}{r^2}\frac{x}{r} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3},$$

pelo que

$$\operatorname{div} F = \frac{3}{r} - \frac{r^2}{r^3} = \frac{2}{r}.$$

c)

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega \operatorname{div} F \, dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{R_1}^{R_2} \frac{2}{r} r^2 \sin\varphi \, dr d\varphi d\theta \\ &= 4\pi R_2^2 - 4\pi R_1^2 \\ &= \iint_{\|(x,y,z)\|=R_2} F \cdot n \, dS - \iint_{\|(x,y,z)\|=R_1} F \cdot n \, dS. \end{aligned}$$

2.

a)

$$\begin{aligned} D(x,y,z) &= \int_0^1 (tF(tx,ty,tz)) \, dt \times (x,y,z) \\ &= \frac{1}{2}\left(Bz - Cy, Cx - Az, Ay - Bx\right). \end{aligned}$$

b)

$$\tilde{D} = D + \nabla\phi.$$

Para que a terceira componente de $\tilde{D}$ seja nula, deve ter-se

$$\partial_z \phi = \frac{1}{2}(Bx - Ay),$$

pelo que

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{2}(Bxz - Ayz) + \psi(x,y).$$

Isto conduz a

$$\tilde{D} = \left(Bz - \frac{1}{2}Cy + \partial_x\psi, -Az + \frac{1}{2}Cx + \partial_y\psi, 0\right).$$

Casos particulares são:

$$\begin{aligned}
\phi = \frac{1}{2}(Bxz - Ayz) \quad &\Rightarrow \quad \tilde{D} = \left(Bz - \frac{1}{2}Cy, -Az + \frac{1}{2}Cx, 0\right), \\
\phi = \frac{1}{2}(Bxz - Ayz) - \frac{1}{2}Cxy \quad &\Rightarrow \quad \tilde{D} = \left(Bz - Cy, -Az, 0\right), \\
\phi = \frac{1}{2}(Bxz - Ayz) + \frac{1}{2}Cxy \quad &\Rightarrow \quad \tilde{D} = \left(Bz, -Az + Cx, 0\right).
\end{aligned}$$

3. O potencial vector não está definido nem quando $r = 0$ (na origem) nem quando

$$r + z = 0 \iff z = -\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \iff z \leq 0 \wedge x = y = 0$$

(na parte negativa do eixo dos z's). Seja $\epsilon > 0$. Designemos por

$$A(x,y,z) := \left(-\frac{y}{r\,(r+z)}, \frac{x}{r\,(r+z)}, 0\right),$$

um potencial vector de f no complementar da parte negativa do eixo dos z's. Para cada $\epsilon > 0$, seja γ a circunferência descrita parametricamente por

$$\alpha(t) \quad = \quad \left(\epsilon\cos t, \epsilon\sin t, -\sqrt{R^2 - \epsilon^2}\right), \quad t \in (0, 2\pi),$$

Como A é C^1 na região $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x,y)\| \geq \epsilon \vee z > 0\}$, e f é contínua sobre a esfera de raio R, usando o Teorema de Stokes obtém-se

$$\begin{aligned}
\iint_{\|(x,y,z)\|=R} f \cdot n \, dS \; &= \; \lim_{\epsilon \searrow 0} \iint_{\substack{\|(x,\,y,\,z)\| \,=\, R \\ \|(x,\,y)\| \,>\, \epsilon \,\vee\, z \,>\, 0}} f \cdot n \, dS \\
&= \lim_{\epsilon \searrow 0} \iint_{\substack{\|(x,\,y,\,z)\| \,=\, R \\ \|(x,\,y)\| \,>\, \epsilon \,\vee\, z \,>\, 0}} \nabla \times A \cdot n \, dS \\
&= \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\gamma} A \cdot d\alpha \\
&= \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_0^{2\pi} A(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \\
&= \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{\epsilon^2}{R\left(R - \sqrt{R^2 - \epsilon^2}\right)} \int_0^{2\pi} (-\sin t, -\cos t, 0) \cdot (-\sin t, -\cos t, 0) \, dt \\
&= 2\pi \lim_{\epsilon \searrow 0} \left(\frac{R + \sqrt{R^2 - \epsilon^2}}{R} \right) \\
&= 4\pi.
\end{aligned}$$