A

Cálculo Diferencial e Integral III

3º Mini-Teste - 4 de Janeiro de 2024

LEAer

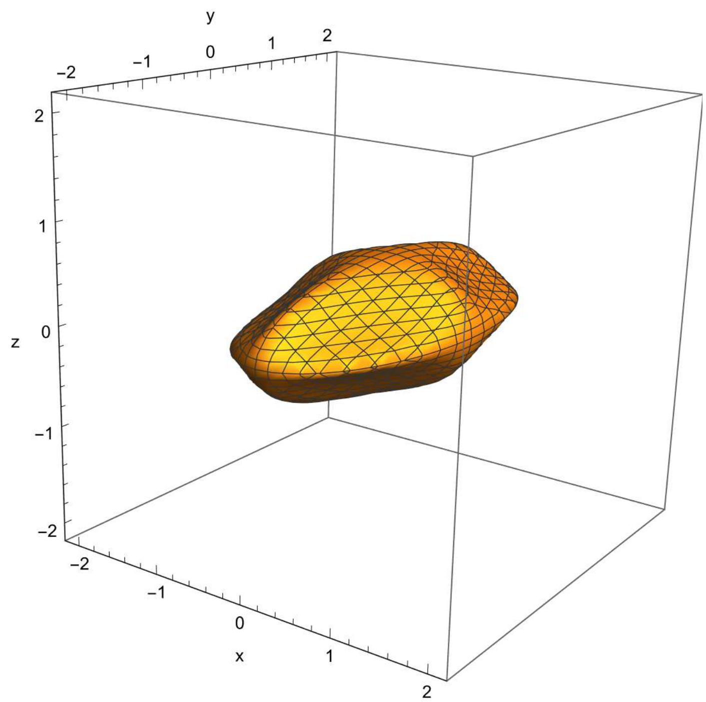
Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. A figura representa a superfície (7)

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 + 9z^2 + 100x^2y^2z^2 = 4\},$$

que se considera orientada com a normal exterior, n.



Seja T a metade superior de M, $T = M \cap \{(x, y, z) : z > 0\}$, e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por

$$f(x, y, z) = (-y, x, 2y - 2x).$$

Calcule

$$\iint_T \operatorname{rot} f \cdot n \, dS,$$

simplificando o resultado.

2. Considere a coroa circular

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{\sqrt{3}}{2} < \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ e } z = \frac{1}{2} \right\},$$

orientada de acordo com a normal $n = (0, 0, 1)$, e

$$f(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}},$$

(um múltiplo do campo gravitacional de uma partícula pontual colocada na origem).

a) Represente parametricamente A e calcule o elemento de área dS. (2)

b) Calcule directamente (5)

$$\iint_A f \cdot n \, dS,$$

simplificando o resultado.

c) Seja (3)

$$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 = \left(\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{3} \right)^2 + z^2 = 1 \text{ e } z < \frac{1}{2} \right\},$$

orientada pela normal n que tem terceira componente negativa nos pontos cuja cooordenada z é negativa. Use o resultado da alínea anterior para calcular

$$\iint_B f \cdot n \, dS.$$

3. Use o Teorema de Stokes e (3)

$$(\partial_x, \partial_y, \partial_z) \times \frac{(yz, -xz, 0)}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} =: f(x, y, z)$$

para calcular o fluxo de f através da esfera de raio R centrada na origem, no sentido da normal exterior.

B

Cálculo Diferencial e Integral III

3º Mini-Teste - 4 de Janeiro de 2024

LEAer

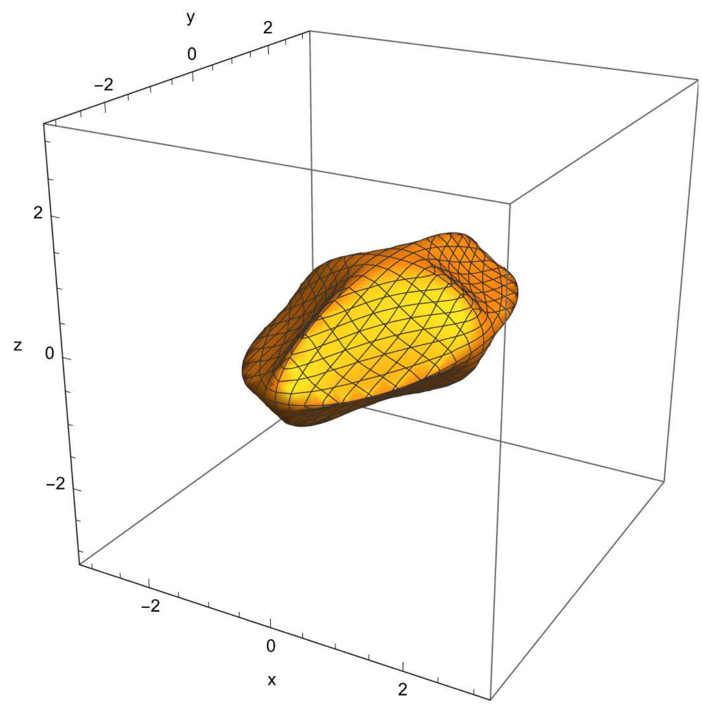
Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. A figura representa a superfície (7)

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 + 9z^2 + 49x^2y^2z^2 = 9\},$$

que se considera orientada com a normal exterior, n.



Seja T a metade direita de M, $T = M \cap \{(x, y, z) : x > 0\}$, e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por

$$f(x, y, z) = (2y - 2z, z, -y).$$

Calcule

$$\iint_T \operatorname{rot} f \cdot n \, dS,$$

simplificando o resultado.

2. Considere a coroa circular

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{3}{2} < \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{5}{2} \text{ e } z = \frac{\sqrt{3}}{2} \right\},$$

orientada de acordo com a normal $n = (0, 0, 1)$, e

$$f(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}},$$

(um múltiplo do campo gravitacional de uma partícula pontual colocada na origem).

a) Represente parametricamente A e calcule o elemento de área dS. (2)

b) Calcule directamente (5)

$$\iint_A f \cdot n \, dS,$$

simplificando o resultado.

c) Seja (3)

$$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 = \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2 \right)^2 + z^2 = 1 \ \text{ e } \ z < \frac{\sqrt{3}}{2} \right\},$$

orientada pela normal n que tem terceira componente negativa nos pontos cuja cooordenada z é negativa. Use o resultado da alínea anterior para calcular

$$\iint_B f \cdot n \, dS.$$

3. Use o Teorema de Stokes e (3)

$$(\partial_x, \partial_y, \partial_z) \times \frac{(yz, -xz, 0)}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} =: f(x, y, z)$$

para calcular o fluxo de f através da esfera de raio R centrada na origem, no sentido da normal exterior.

A

Cálculo Diferencial e Integral III

3º Mini-Teste - 4 de Janeiro de 2024

LEAer

Resolução

1. A fronteira de T é a curva, C, definida por $4x^2 + y^2 = 4$ no plano $z = 0$, e descrita parametricamente por

$$\alpha(t) = (\cos t, 2\sin t, 0)\,,\ t \in [0, 2\pi].$$

Usando o Teorema de Stokes,

$$\begin{aligned}&\iint_T \operatorname{rot} f \cdot n\, dS = \int_C f \cdot d\alpha = \int_0^{2\pi} f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-2\sin t, \cos t, 4\sin t - 2\cos t) \cdot (-\sin t, 2\cos t, 0)\, dt \\ &= 2\int_0^{2\pi} dt = 4\pi.\end{aligned}$$

2.

a) A superfície A é representada parametricamente por

$$g(r,\theta) = \left(r\cos\theta, r\sin\theta, \frac{1}{2}\right), \quad r \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right),\ \theta \in (0, 2\pi).$$

O elemento de área é

$$dS = \left\| \frac{\partial g}{\partial r} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right\| dr d\theta = r\, dr d\theta.$$

Alternativamente, a superfície A é representada parametricamente por

$$\tilde{g}(x,y) = \left(x, y, \frac{1}{2}\right),\ (x,y) \in \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\sqrt{3}}{2} < \sqrt{x^2+y^2} < \frac{3\sqrt{3}}{2}\right\},$$

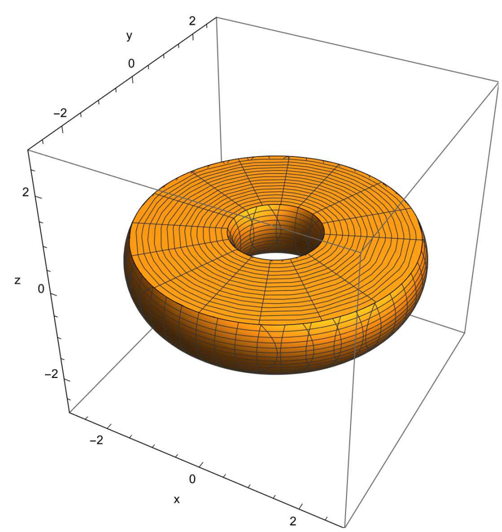
O elemento de área é

$$dS = \left\| \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x} \times \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y} \right\| dx dy = dx dy.$$

b)

$$
\begin{aligned}
\iint_A f \cdot n \, dS &= \iint_A \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \, dS \\
&= \frac{1}{2} \iint_A \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+\frac{1}{4})^3}} \, dxdy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \frac{r}{\sqrt{(r^2+\frac{1}{4})^3}} \, dr d\theta \\
&= \frac{\pi}{2} \int_1^7 \frac{1}{\sqrt{u^3}} \, du = -\,\pi \frac{1}{\sqrt{u}}\bigg|_1^7 \\
&= \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{7}}\right) = \pi \left(1 - \frac{\sqrt{7}}{7}\right).
\end{aligned}
$$

c) $A \cup B$ limita uma região Ω onde f é de classe C^1 e tem divergência nula.



De acordo com o Teorema da Divergência, tem-se

$$
0 = \iiint_\Omega \operatorname{div} f \, dV = \iint_A f \cdot n \, dS + \iint_B f \cdot n \, dS.
$$

Conclui-se que

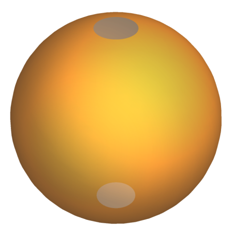
$$
\iint_B f \cdot n \, dS = \pi \left(\frac{\sqrt{7}}{7} - 1\right).
$$

3. Designemos por

$$A(x,y,z) := \frac{(yz, -xz, 0)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

um potencial vector de f no complementar do eixo dos z's. Para cada $\epsilon > 0$, sejam γ_1 e γ_2 as circunferências descritas parametricamente por

$$\begin{aligned}\alpha_1(t) &= \left(\epsilon\cos t, -\epsilon\sin t, \sqrt{R^2-\epsilon^2}\right), \quad t \in (0, 2\pi),\\ \alpha_2(t) &= \left(\epsilon\cos t, \epsilon\sin t, -\sqrt{R^2-\epsilon^2}\right), \quad t \in (0, 2\pi),\end{aligned}$$



respectivamente. Como A é C^1 na região $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x,y)\| \geq \epsilon\}$, e f é contínua sobre a esfera de raio R, usando o Teorema de Stokes obtém-se

$$\begin{aligned}&\iint_{\|(x,y,z)\|=R} f \cdot n\, dS = \lim_{\epsilon \searrow 0} \iint_{\substack{\|(x,\,y,\,z)\| \,=\, R\\ \|(x,\,y)\| \,>\, \epsilon}} f \cdot n\, dS\\ &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \iint_{\substack{\|(x,\,y,\,z)\| \,=\, R\\ \|(x,\,y)\| \,>\, \epsilon}} \nabla \times A \cdot n\, dS\\ &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \left(\int_{\gamma_1} A \cdot d\alpha_1 + \int_{\gamma_2} A \cdot d\alpha_2 \right)\\ &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \left(\int_0^{2\pi} A(\alpha_1(t)) \cdot \alpha_1'(t) dt + \int_0^{2\pi} A(\alpha_2(t)) \cdot \alpha_2'(t) dt \right)\\ &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \left(\frac{\sqrt{R^2-\epsilon^2}}{R} \int_0^{2\pi} (-\sin t, -\cos t, 0) \cdot (-\sin t, -\cos t, 0)\, dt \right.\\ &\qquad \left. + \frac{\sqrt{R^2-\epsilon^2}}{R} \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, dt \right)\\ &= 4\pi.\end{aligned}$$

B

Cálculo Diferencial e Integral III

3º Mini-Teste - 4 de Janeiro de 2024

LEAer

Resolução

1. A fronteira de T é a curva, C, definida por $y^2 + 9z^2 = 9$ no plano $x = 0$, e descrita parametricamente por

$$\alpha(t) = (0, 3\cos t, \sin t)\,,\ t \in [0, 2\pi].$$

Usando o Teorema de Stokes,

$$\iint_T \operatorname{rot} f \cdot n\, dS = \int_C f \cdot d\alpha = \int_0^{2\pi} f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (6\cos t - 2\sin t, \sin t, -3\cos t) \cdot (0, -3\sin t, \cos t)\, dt$$
$$= -3\int_0^{2\pi} dt = -6\pi.$$

2.

a) A superfície A é representada parametricamente por

$$g(r, \theta) = \left(r\cos\theta, r\sin\theta, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad r \in \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right),\ \theta \in (0, 2\pi).$$

O elemento de área é

$$dS = \left\| \frac{\partial g}{\partial r} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right\| drd\theta = r\, drd\theta.$$

Alternativamente, a superfície A é representada parametricamente por

$$\tilde{g}(x, y) = \left(x, y, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad (x, y) \in \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{3}{2} < \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{5}{2}\right\},$$

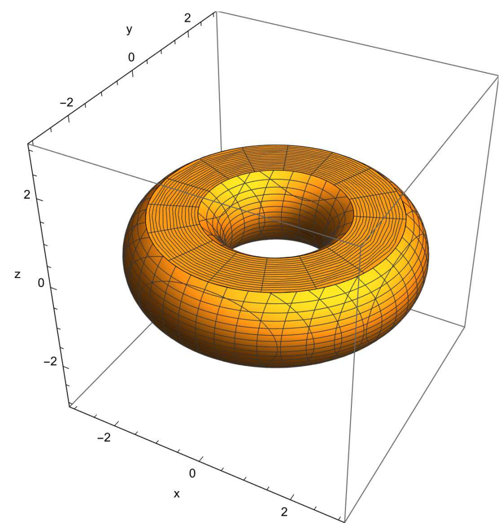
O elemento de área é

$$dS = \left\| \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x} \times \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y} \right\| dxdy = dxdy.$$

b)

$$\begin{aligned}
\iint_A f\cdot n\,dS &= \iint_A \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\,dS \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\iint_A \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+\frac{3}{4})^3}}\,dxdy \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^{2\pi}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{r}{\sqrt{(r^2+\frac{3}{4})^3}}\,drd\theta \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\pi\int_3^7 \frac{1}{\sqrt{u^3}}\,du = -\sqrt{3}\pi\frac{1}{\sqrt{u}}\Big|_3^7 \\
&= \pi\left(1-\sqrt{\frac{3}{7}}\right) = \pi\left(1-\frac{\sqrt{21}}{7}\right).
\end{aligned}$$

c) $A\cup B$ limita uma região Ω onde f é de classe C^1 e tem divergência nula.



De acordo com o Teorema da Divergência, tem-se

$$0 = \iiint_\Omega \operatorname{div} f\,dV = \iint_A f\cdot n\,dS + \iint_B f\cdot n\,dS.$$

Conclui-se que

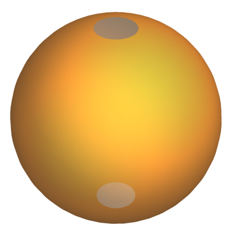
$$\iint_B f\cdot n\,dS = \pi\left(\frac{\sqrt{21}}{7}-1\right).$$

3. Designemos por

$$A(x,y,z) := \frac{(yz, -xz, 0)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

um potencial vector de f no complementar do eixo dos z's. Para cada $\epsilon > 0$, sejam γ_1 e γ_2 as circunferências descritas parametricamente por

$$\begin{aligned}\alpha_1(t) &= \left(\epsilon\cos t, -\epsilon\sin t, \sqrt{R^2-\epsilon^2}\right), \quad t \in (0, 2\pi),\\ \alpha_2(t) &= \left(\epsilon\cos t, \epsilon\sin t, -\sqrt{R^2-\epsilon^2}\right), \quad t \in (0, 2\pi),\end{aligned}$$



respectivamente. Como A é C^1 na região $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x,y)\| \geq \epsilon\}$, e f é contínua sobre a esfera de raio R, usando o Teorema de Stokes obtém-se

$$\begin{aligned}&\iint_{\|(x,y,z)\|=R} f\cdot n\,dS = \lim_{\epsilon\searrow 0}\iint_{\substack{\|(x,\,y,\,z)\|\,=\,R\\ \|(x,\,y)\|\,>\,\epsilon}} f\cdot n\,dS\\ &= \lim_{\epsilon\searrow 0}\iint_{\substack{\|(x,\,y,\,z)\|\,=\,R\\ \|(x,\,y)\|\,>\,\epsilon}} \nabla\times A\cdot n\,dS\\ &= \lim_{\epsilon\searrow 0}\left(\int_{\gamma_1} A\cdot d\alpha_1 + \int_{\gamma_2} A\cdot d\alpha_2\right)\\ &= \lim_{\epsilon\searrow 0}\left(\int_0^{2\pi} A(\alpha_1(t))\cdot\alpha_1'(t)dt + \int_0^{2\pi} A(\alpha_2(t))\cdot\alpha_2'(t)dt\right)\\ &= \lim_{\epsilon\searrow 0}\left(\frac{\sqrt{R^2-\epsilon^2}}{R}\int_0^{2\pi}(-\sin t, -\cos t, 0)\cdot(-\sin t, -\cos t, 0)\,dt\right.\\ &\qquad\left. + \frac{\sqrt{R^2-\epsilon^2}}{R}\int_0^{2\pi}(-\sin t, \cos t, 0)\cdot(-\sin t, \cos t, 0)\,dt\right)\\ &= 4\pi.\end{aligned}$$