Cálculo Diferencial e Integral III

3º Mini-Teste - 11 de Janeiro de 2023

LMAC

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Determine a solução geral de

a) $y'' + 9y = 0.$ (3)

b) $y'' - 6y' + 9y = e^{3t}.$ (3)

2. Escreva uma equação diferencial que admite como soluções (4)

$$y = c_1 t + c_2 t \sin(3t) + \sin t, \quad \text{para todos os } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Considere o problema

$$\begin{cases} u_t = t\, u_{xx} & \text{se } (x,t) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, \infty), \\ u(0,t) = u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0 & \text{se } t \in [0, \infty), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{se } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \end{cases}$$

para a função u pertencente ao espaço

$$\left\{ u \in C^1\left(\left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \times [0, \infty)\right) : u_{xx} \text{ existe e } u_{xx} \in C^0\left(\left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \times [0, \infty)\right) \right\},$$

que satisfaz uma equação do tipo calor com condições de fronteira mistas, em que $u_0 \in C^3$ é uma função dada.

a) Determine as condições de compatibilidade para a função u_0. (2)

b) Resolva o problema para uma função u_0 genérica. (4)

c) Escreva a solução quando $u_0(x) = \sin(3x)$. (1)

d) Supondo que $u \in C^\infty\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, \infty)\right)$, obtenha uma expressão para u_{tt} em termos das derivadas parciais em ordem a x de u. (1)

4. Seja $f \in L^2(-l, l)$. Obtenha uma expressão para $\|f\|$ em termos dos seus coeficientes de Fourier. (2)

Cálculo Diferencial e Integral III

3º Mini-Teste - 11 de Janeiro de 2023

LMAC

Resolução

1.

a)

$$(D^2+3^2)y=0 \Leftrightarrow y=c_1\cos(3t)+c_2\sin(3t), \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

b)

$$(D-3)^2y=e^{3t} \Rightarrow (D-3)^3y=0 \Leftrightarrow y=c_1e^{3t}+c_2te^{3t}+c_3t^2e^{3t}.$$

$$(D-3)^2(t^2e^{3t})=(D-3)(2te^{3t})=2e^{3t}.$$

$$(D-3)^2y=e^{3t} \Leftrightarrow y=c_1e^{3t}+c_2te^{3t}+\frac{t^2}{2}e^{3t}, \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

2.

$$D^2t=0, \qquad (D^2+3^2)^2(t\sin(3t))=0.$$

$$D^2(D^2+3^2)^2\sin t=D^2(D^2+3^2)(-1+9)\sin t=8^2D^2\sin t=-64\sin t.$$

Portanto, uma equação diferencial é

$$D^2(D^2+3^2)^2y=-64\sin t.$$

Esta equação pode ser escrita na forma

$$y^{(vi)}+18y^{(iv)}+81y''=-64\sin t.$$

3.

a) Fazendo $t=0$ em $u(0,t)=0$, e $x=0$ em $u(x,0)=u_0(x)$, obtém-se $u_0(0)=0$. Note-se que $u_x(x,0)=u_0'(x)$. Fazendo $t=0$ em $u_x(l,t)=0$, e $x=l$ em $u_x(x,0)=u_0'(x)$, obtém-se $u_0'(l)=0$.
Examinando a equação diferencial no ponto $(0,0)$, tem-se

$$0=u_t(0,0)=t|_{t=0}\,u_0''(0) \;\Leftrightarrow\; 0=0. \quad (\star)$$

Daqui nada se conclui sobre $u_0''(0)$. No entanto, da equação diferencial conclui-se que $u_{xx}(0,t)=0$ para $t>0$. Passando ao limite, quando $t\searrow 0$, obtém-se $u_{xx}(0,0)=0$. Portanto, $u_0''(0)$ também se deve anular.
As condições de compatibilidade são $u_0(0)=u_0'(l)=u_0''(0)=0$.

b) Atendendo às condições fronteira mistas, para cada t fixo, prolonguemos $u(\cdot, t)$ como função ímpar em x em torno de zero, par em x em torno de $\frac{\pi}{2}$, e periódica de período 2π. Então

$$u(x,t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} b_n(t) \sin(nx),$$

porque $\sin(nx)$ é par em torno de $\frac{\pi}{2}$ para n ímpar, e é ímpar em torno de $\frac{\pi}{2}$ para n par. Substituindo esta expressão para u na equação diferencial e usando a unicidade dos coeficientes de Fourier, para todo o n (ímpar) deve ter-se

$$b_n' = -n^2 t\, b_n \;\Leftrightarrow\; b_n(t) = c_n e^{-\frac{n^2t^2}{2}}.$$

Isto conduz a

$$u(x,t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2t^2}{2}} \sin(nx). \qquad (\star)$$

Finalmente, usando a condição inicial obtém-se

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_0(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_0(x)\sin(nx)\,dx \\ &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_0(x)\sin(nx)\,dx. \end{aligned}$$

Como indicado em $(\star)$, a soma apenas se faz sobre os n ímpares. Note-se que, quando n é par, a segunda expressão para c_n (que envolve o integral de 0 a π) é nula, uma vez que u_0 é estendida como função par em torno de $\frac{\pi}{2}$, e $x \mapsto \sin(nx)$ é ímpar em torno de $\frac{\pi}{2}$ para n par.

c) Se $u_0(x) = \sin(3x)$, $c_3 = 1$ e os restantes c_n's são nulos. A solução é

$$u(x,t) = e^{-\frac{3^2t^2}{2}} \sin(3x).$$

d) Derivando ambos os membros da equação diferencial em ordem a t, obtém-se

$$u_{tt} = u_{xx} + t u_{txx}.$$

Derivando duas vezes ambos os membros da equação diferencial em ordem a x, obtém-se

$$u_{xxt} = t u_{xxxx}.$$

Como u é regular, $u_{txx} = u_{xxt}$. Substituindo u_{txx} na equação anterior, conclui-se

$$u_{tt} = u_{xx} + t^2 u_{xxxx}.$$

4. Seja $u_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ e $v_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$.

$$\begin{aligned}
\|f\|^2 &= (f,f) = \left(f, \sum_{n=0}^{\infty}(a_n u_n + b_n v_n)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(f, a_n u_n + b_n v_n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(a_n(f,u_n) + b_n(f,v_n)) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n^2(u_n,u_n) + b_n^2(v_n,v_n)\right) \\
&= 2la_0^2 + l\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right).
\end{aligned}$$

A série passou para fora do produto interno porque este é linear e contínuo. Conclusão:

$$\|f\| = \left(2la_0^2 + l\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$