Cálculo Diferencial e Integral III

3º Mini-Teste - 1 de Fevereiro de 2022

LEAer

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Seja $r = \|(x, y, z)\|$,

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right)$$

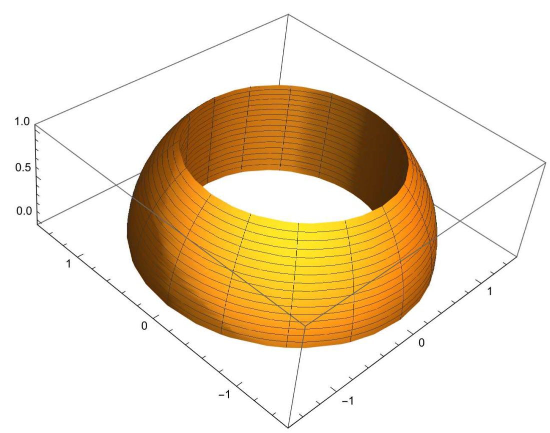
e

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 1 \text{ e } 0 < z < 1\}.$$

a) Seja $\rho > 1$ e $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 0 \text{ e } 1 < r < \rho\}$. Calcule o fluxo de F através de A. (2)

b) Use o Teorema da Divergência e o resultado da alínea anterior para calcular o fluxo de F através de C. (8)

Resposta: Parte de uma esfera de raio $\sqrt{2}$ a envolver o cilindro:



a) 0 porque a normal é perpendicular a F. **b)** Tendo em atenção que $\partial_x r = \frac{x}{r}$, $\partial_y r = \frac{y}{r}$ e $\partial_z r = \frac{z}{r}$, imediatamente se obtém que a divergência de F é nula. Nesta alínea toma-se o A da alínea anterior correspondente a $\rho = \sqrt{2}$. A parte de esfera indicada corresponde a $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$. A resposta é $\sqrt{2}\pi$.

2. Determine a solução de (10)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{(n+1)^2} & \text{para } (x,t) \in (0,\pi) \times (0, +\infty), \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & \text{para } t \in (0, +\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{para } x \in [0, \pi], \end{cases}$$

onde $u_0 : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ é dada.
Resposta:

$$u(x,t) = c_0 + t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2(n+1)^2} + c_n e^{-n^2 t} \right) \cos(nx),$$

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x)\, dx,$$

$$c_n = -\frac{1}{n^2(n+1)^2} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) \cos(nx)\, dx,$$

para $n \geq 1$.

Cálculo Diferencial e Integral III

3º Mini-Teste - 1 de Fevereiro de 2022

LEAer

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Seja $r = \|(x,y,z)\|$,

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right)$$

e

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 1 \text{ e } 0 < z < \sqrt{3}\}.$$

a) Seja $\rho > 1$ e $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 0 \text{ e } 1 < r < \rho\}$. Calcule o fluxo de F através de A. (2)

b) Use o Teorema da Divergência e o resultado da alínea anterior para calcular o fluxo de F através de C. (8)

Resposta: **a)** 0. **b)** $\sqrt{3}\pi$.

2. Determine a solução de (10)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2+1} & \text{para } (x,t) \in (0,\pi) \times (0,+\infty), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{para } t \in (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{para } x \in [0,\pi], \end{cases}$$

onde $u_0 : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ é dada.

Resposta:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2(n^2+1)} + c_n e^{-n^2 t}\right) \sin(nx),$$

$$c_n = -\frac{1}{n^2(n^2+1)} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) \sin(nx)\, dx$$

para $n \geq 2$.

Cálculo Diferencial e Integral III

3º Mini-Teste - 4 de Fevereiro de 2022

LEAer

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Considere a porção de toro (10)

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2+y^2}-3\right)^2 + z^2 = 4 \text{ e } x < 0\right\},$$

com normal a apontar para fora do toro, e considere o campo vectorial definido por

$$F(x,y,z) = \left(0, -z, \sqrt{x^2+y^2}-3\right).$$

Usando o Teorema de Stokes, calcule o fluxo do rotacional de F através de T.

Resposta: Fazendo $x = 0$ e $y > 0$, obtém-se $(y-3)^2 + z^2 = 4$. O toro é obtido rodando esta circunferência, no plano yOz, de centro em $(0,3,0)$ e raio 2, em torno do eixo dos zs. A porção do toro T é a metade que se encontra em $x < 0$. Pelo Teorema de Stokes, $\iint_T \operatorname{rot} F \cdot n \, dS = \int_{\partial T} F \cdot dg$. A fronteira da porção de toro é constituida por duas circunferências. Tendo em conta a normal dada, estas devem ser orientadas no sentido inverso (sentido dos ponteiros do relógio) quando vistas do lado positivo do eixo dos xs.

Note-se que para $x = 0$ e $y < 0$ se tem $F(x,y,z) = (0, -z, -y-3)$, enquanto para $x = 0$ e $y > 0$ se tem $F(x,y,z) = (0,-z,y-3)$. A circunferência em $x = 0$ e $y < 0$ pode ser descrita parametricamente por $(0, -3+2\cos\theta, -2\sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$. A circunferência em $x = 0$ e $y > 0$ pode ser descrita parametricamente por $(0, 3+2\cos\theta, -2\sin\theta)$, $\theta \in [0,2\pi]$. Calculando os integrais de linha, obtém-se $0 - 8\pi = -8\pi$.

2. Considere o problema (10)

$$\begin{cases} u_t = u_x & \text{para } (x,t) \in [-\pi,\pi] \times (-\infty,+\infty), \\ u(-\pi,t) = u(\pi,t) & \text{para } t \in (-\infty,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{para } x \in [-\pi,\pi], \end{cases}$$

onde $u_0 \in C^1[-\pi,\pi]$ é dada. Determine as condições de compatibilidade para que exista uma solução de classe C^1. Determine uma solução do problema. Simplifique a resposta.

Resposta: As condições de compatibilidade são $u_0(-\pi) = u_0(\pi)$ e $u_0'(-\pi) = u_0'(\pi)$.

Para cada t fixo, prolongamos $u(\,\cdot\,, t)$ como função periódica em x, de período 2π. Desenvolvendo esta função em série de Fourier, obtém-se

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(t)\cos(nx) + b_n(t)\sin(nx)]. \tag{1}$$

As condições fronteira estão formalmente satisfeitas. Substituindo esta expressão na equação diferencial, chega-se a

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}[a_n'(t)\cos(nx) + b_n'(t)\sin(nx)]\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}[-na_n(t)\sin(nx) + nb_n(t)\cos(nx)].\end{aligned}$$

Atendendo à unicidade dos coeficientes de Fourier, para todo o $n \in \mathbb{N}$ deve ser satisfeito o sistema linear de primeira ordem

$$\begin{aligned} a_n' &= nb_n,\\ b_n' &= -na_n.\end{aligned}$$

Para $n = 0$, tem-se $a_0(t) = \alpha_0$. (b_0 não interessa e pode ser tomado como nulo.) Para $n > 0$, este sistema implica que

$$\begin{aligned} a_n'' &= nb_n' = -n^2 a_n,\\ b_n &= \frac{a_n'}{n}.\end{aligned}$$

Podemos concluir que

$$\begin{aligned} a_n(t) &= \alpha_n\cos(nt) + \beta_n\sin(nt),\\ b_n(t) &= -\alpha_n\sin(nt) + \beta_n\cos(nt).\end{aligned}$$

Substituindo em (1), tem-se

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt)) \cos(nx) \\
&\qquad + \sum_{n=0}^{\infty}(-\alpha_n \sin(nt) + \beta_n \cos(nt)) \sin(nx) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(\cos(nt)\cos(nx) - \sin(nt)\sin(nx)) \\
&\qquad + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(\sin(nt)\cos(nx) + \cos(nt)\sin(nx)) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}[\alpha_n \cos(n(x+t)) + \beta_n \sin(n(x+t))] \qquad (2)
\end{aligned}$$

Seja $\tilde{u}_0$ o prolongamento periódico de u_0, com período 2π. Para garantir a condição inicial, deve ter-se

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty}[\alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx)] = \tilde{u}_0(x). \qquad (3)$$

Logo, os α_n e os β_n devem ser os coeficientes de Fourier de $\tilde{u}_0$. Comparando (2) com (3), tira-se imediatamente que $u(x,t) = \tilde{u}_0(x+t)$.

Cálculo Diferencial e Integral III

3º Mini-Teste - 4 de Fevereiro de 2022

LEAer

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Considere a porção de toro (10)

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 5 \right)^2 + z^2 = 9 \text{ e } y < 0 \right\},$$

com normal a apontar para dentro do toro, e considere o campo vectorial definido por

$$F(x, y, z) = \left(z, 0, \sqrt{x^2 + y^2} - 5 \right).$$

Usando o Teorema de Stokes, calcule o fluxo do rotacional de F através de T.

Resposta: $18\pi + 0 = 18\pi$.

2. Considere o problema (10)

$$\begin{cases} u_t = 2u_x & \text{para } (x,t) \in [-\pi, \pi] \times (-\infty, +\infty), \\ u(-\pi, t) = u(\pi, t) & \text{para } t \in (-\infty, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{para } x \in [-\pi, \pi], \end{cases}$$

onde $u_0 \in C^1[-\pi, \pi]$ é dada. Determine as condições de compatibilidade para que exista uma solução de classe C^1. Determine uma solução do problema. Simplifique a resposta.

Resposta: As condições de compatibilidade são $u_0(-\pi) = u_0(\pi)$ e $u_0'(-\pi) = u_0'(\pi)$. $u(x, t) = \tilde{u}_0(x + 2t)$, com $\tilde{u}_0$ o prolongamento periódico de u_0, de período 2π.

Cálculo Diferencial e Integral III

3º Mini-Teste - 17 de Fevereiro de 2022

LEAer

Duração: 30 minutos

Apresente os cálculos

1. Determine a solução de

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{se } 0 < x < a \text{ e } 0 < y < b, \\ u_y(x,0) = 0 & \text{se } 0 < x < a, \\ u_y(x,b) = f(x) & \text{se } 0 < x < a, \\ u_x(0,y) = 0 & \text{se } 0 < y < b, \\ u_x(a,y) = 0 & \text{se } 0 < y < b, \end{cases}$$

onde a função f satisfaz $\int_0^a f(x)\,dx = 0$.

2. Calcule a área da porção de hiperbolóide

$$\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1,\ 0 \le z \le \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$