Cálculo Diferencial e Integral III

Repescagem do 2º Mini-Teste - 17 de Janeiro de 2024

LEAer

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Seja $\mu \in \mathbb{R}^+$. Determine a solução geral de (7)

$$y''(t) + \mu^2 y(t) = \cosh(\mu t).$$

2. Determine a solução do problema de valores fronteira envolvendo a equação de Laplace (9)

$$\begin{cases} (u_{xx} + u_{yy})(x,y) = 8\sin(2x) & \text{para } (x,y) \in [0,\pi] \times [0,1], \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 & \text{para } y \in [0,1], \\ u(x,0) = 0 & \text{para } x \in [0,\pi], \\ u(x,1) = -2\sin(2x) & \text{para } x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

3.

a) Seja A uma matriz 2×2 com valores próprios distintos μ e λ, e vectores próprios associados v e w, respectivamente. Determine a solução de (2)

$$X'(t) = AX(t) + e^{\mu t} v, \quad X(0) = w.$$

b) Seja A uma matriz $n \times n$ e seja X_0 dado. Prove directamente (sem apelar ao Teorema de Picard-Lindelöf) que a solução do problema de valor inicial (2)

$$X' = AX, \quad X(0) = X_0,$$

é única.

Cálculo Diferencial e Integral III

Repescagem do 2º Mini-Teste - 17 de Janeiro de 2024

LEAer

Resolução

1.

$$(D^2+\mu^2)y = \cosh(\mu t) \;\Rightarrow\; (D^2-\mu^2)(D^2+\mu^2)y = 0.$$

A solução geral desta equação homogénea é

$$y = \alpha\cos(\mu t) + \beta\sin(\mu t) + \gamma\cosh(\mu t) + \delta\sinh(\mu t).$$

Substituindo na equação original, vem

$$(D^2+\mu^2)(\alpha\cos(\mu t) + \beta\sin(\mu t) + \gamma\cosh(\mu t) + \delta\sinh(\mu t)) = \cosh(\mu t),$$

$$(D^2+\mu^2)(\gamma\cosh(\mu t) + \delta\sinh(\mu t)) = \cosh(\mu t),$$

$$2\gamma\mu^2\cosh(\mu t) + 2\delta\mu^2\sinh(\mu t) = \cosh(\mu t),$$

o que implica $\gamma = \frac{1}{2\mu^2}$ e $\delta = 0$. A solução geral da equação do enunciado é

$$y = \alpha\cos(\mu t) + \beta\sin(\mu t) + \frac{1}{2\mu^2}\cosh(\mu t), \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

2. Atendendo às condições fronteira em $x=0$ e $x=\pi$, de Dirichlet homogéneas, para cada y fixo prolongamos $u(\,\cdot\,,y)$ como função ímpar em x e periódica de período 2π. O prolongamento pode ser desenvolvido em série de Fourier:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty}[a_n(y)\cos(nx) + b_n(y)\sin(nx)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y)\sin(nx). \end{aligned}$$

As condições fronteira em $x=0$ e em $x=\pi$ estão formalmente satisfeitas. Substituindo na equação diferencial, obtém-se

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-n^2 b_n(y) + b_n''(y))\sin(nx) = 8\sin(2x)$$

Por unicidade dos coeficientes de Fourier, vem

$$b_n'' - n^2 b_n = 0, \text{ para } n \neq 2 \qquad \wedge \qquad b_2'' - 4b_2 = 8.$$

Logo,

$$\begin{aligned} b_n &= c_n \cosh(ny) + d_n \sinh(ny), \text{ para } n \neq 2 \\ b_2 &= -2 + c_2 \cosh(2y) + d_2 \sinh(2y). \end{aligned}$$

A função u é

$$u(x, y) = -2\sin(2x) + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cosh(ny) + d_n \sinh(ny)) \sin(nx).$$

A equação diferencial está formalmente satisfeita. Para garantir a condição fronteira em $y = 0$, devemos ter

$$u(x, 0) = -2\sin(2x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx) = 0.$$

Deduz-se que $c_2 = 2$ e que os outros c_n's são nulos. Portanto,

$$u(x, y) = -2\sin(2x) + 2\cosh(2y)\sin(2x) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sinh(ny)\sin(nx).$$

Resta garantir a condição fronteira em $y = 1$:

$$\begin{aligned} u(x, 1) &= -2\sin(2x) + 2\cosh(2)\sin(2x) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sinh(n)\sin(nx) \\ &= -2\sin(2x). \end{aligned}$$

Novamente por unicidade dos coeficientes de Fourier,

$$-2 + 2\cosh(2) + d_2 \sinh(2) = -2,$$

sendo os outros d_n's nulos. Como

$$d_2 = -2\coth(2),$$

conclui-se que

$$u(x, y) = -2\sin(2x) + 2\cosh(2y)\sin(2x) - 2\coth(2)\sinh(2y)\sin(2x).$$

3.

a) Procuremos soluções da forma

$$X(t) = c(t)v + d(t)w.$$

Então

$$c'v + d'w = c\mu v + d\lambda w + e^{\mu t}v.$$

Logo,

$$\begin{aligned} c' &= \mu c + e^{\mu t}, \\ d' &= \lambda d. \end{aligned}$$

Resolvendo estas equações obtemos

$$\begin{aligned} c &= \alpha e^{\mu t} + t e^{\mu t}, \\ d &= \beta e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$X = (\alpha + t)\, e^{\mu t} v + \beta e^{\lambda t} w, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Como $X(0) = w$, conclui-se que

$$X = t e^{\mu t} v + e^{\lambda t} w.$$

b) Seja X uma solução. Uma vez que

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}X) = e^{-At}(-A)X + e^{-At}AX = 0,$$

tem-se que

$$t \mapsto e^{-At}X$$

é constante, igual ao seu valor em $t = 0$, que é $e^{-A0}X(0) = IX_0 = X_0$. Ou seja,

$$e^{-At}X = X_0.$$

Multiplicando ambos os membros desta igualdade por e^{At} à esquerda, e tendo em atenção que $e^{At}e^{-At} = e^{(A-A)t} = e^{0t} = I$ (porque A e $-A$ comutam), obtém-se

$$X = e^{At}X_0.$$