A

Cálculo Diferencial e Integral III

2º Mini-Teste - 28 de Novembro de 2024

LEAer

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Determine a solução geral das equações diferenciais:

a) $(D^2+9)y=0,$ (2)

b) $(D^2-9)y=0,$ (2)

c) $((D+1)^2-9)(D+4)y=0,$ (2)

d) $(D+2)^2y=e^{-2t}+1.$ (2)

2. Determine a solução de (7)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2tu & \text{para } (x,t) \in [0,\pi] \times [0,+\infty[, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{para } t \in [0,+\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{para } x \in [0,\pi], \end{cases}$$

onde u_0 é uma função dada.

3. Sejam f e g duas funções em $L^2(-1,1)$. Escreva uma expressão para a projecção de f em g. (2)

4. Seja A uma matriz $n \times n$ real anti-simétrica, e $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ uma solução de (3)

$$\dot{X} = (I+A)X.$$

Consegue estimar a evolução da $\|X\|$? Justifique.

B

Cálculo Diferencial e Integral III

2º Mini-Teste - 28 de Novembro de 2024

LEAer

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Determine a solução geral das equações diferenciais:

a) $(D^2 - 4)y = 0,$ (2)

b) $(D^2 + 4)y = 0,$ (2)

c) $((D-1)^2 - 4)(D-3)y = 0,$ (2)

d) $(D-3)^2 y = 2 + e^{3t}.$ (2)

2. Determine a solução de (7)

$$\begin{cases} u_t = 2tu_{xx} - u & \text{para } (x,t) \in [0,\pi] \times [0,+\infty[, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{para } t \in [0,+\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{para } x \in [0,\pi], \end{cases}$$

onde u_0 é uma função dada.

3. Sejam f e g duas funções em $L^2(-\pi,\pi)$ Escreva uma expressão para a projecção de g em f. (2)

4. Seja A uma matriz $n \times n$ real anti-simétrica, e $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ uma solução de (3)

$$\dot{X} = (-I + A)X.$$

Consegue estimar a evolução da $\|X\|$? Justifique.

C

Cálculo Diferencial e Integral III

2º Mini-Teste - 28 de Novembro de 2024

LEAer

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Determine a solução geral das equações diferenciais:

a) $(D^2+16)y=0$, (2)

b) $(D^2-9)y=0$, (2)

c) $((D+1)^2-9)(D+4)y=0$, (2)

d) $(D+2)^2y=e^{-2t}+3$. (2)

2. Determine a solução de (7)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2tu & \text{para } (x,t) \in [0,\pi] \times [0,+\infty[, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{para } t \in [0,+\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{para } x \in [0,\pi], \end{cases}$$

onde u_0 é uma função dada.

3. Sejam f e g duas funções em $L^2(-1,1)$. Escreva uma expressão para a projecção de f em g. (2)

4. Seja A uma matriz $n \times n$ real anti-simétrica, e $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ uma solução de (3)

$$\dot{X} = (I - A)X.$$

Consegue estimar a evolução da $\|X\|$? Justifique.

D

Cálculo Diferencial e Integral III

2º Mini-Teste - 28 de Novembro de 2024

LEAer

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Determine a solução geral das equações diferenciais:

a) $(D^2 - 4)y = 0,$ (2)

b) $(D^2 + 4)y = 0,$ (2)

c) $((D-1)^2 - 4)(D-3)y = 0,$ (2)

d) $(D-3)^2 y = 3 + e^{3t}.$ (2)

2. Determine a solução de (7)

$$\begin{cases} u_t = 2tu_{xx} - u & \text{para } (x,t) \in [0,\pi] \times [0,+\infty[, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{para } t \in [0,+\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{para } x \in [0,\pi], \end{cases}$$

onde u_0 é uma função dada.

3. Sejam f e g duas funções em $L^2(-\pi,\pi)$ Escreva uma expressão para a projecção de g em f. (2)

4. Seja A uma matriz $n \times n$ real anti-simétrica, e $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ uma solução de (3)

$$\dot{X} = (-I - A)X.$$

Consegue estimar a evolução da $\|X\|$? Justifique.

A

Cálculo Diferencial e Integral III

2º Mini-Teste - 28 de Novembro de 2024

LEAer

Resolução

1.

a)

$$(D^2+9)y = 0 \Leftrightarrow y = c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t).$$

b)

$$(D^2-9)y = (D-3)(D+3)y = 0 \Leftrightarrow y = c_1e^{3t} + c_2e^{-3t}.$$

c) A equação

$$\begin{aligned}((D+1)^2-9)(D+4)y &= (D+1-3)(D+1+3)(D+4)y \\ &= (D-2)(D+4)^2y = 0\end{aligned}$$

tem como solução geral

$$y = c_1e^{2t} + c_2e^{-4t} + c_3te^{-4t}.$$

d) A equação $(D+2)^2y = e^{-2t}+1$ tem como solução geral

$$y = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t} + \frac{t^2}{2}e^{-2t} + \frac{1}{4}.$$

2. Atendendo às condições fronteira de Dirichlet homogéneas, para cada t fixo prolongamos $u(\,\cdot\,,t)$ como função ímpar em x e periódica de período 2π. O prolongamento pode ser desenvolvido em série de Fourier:

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}[a_n(t)\cos(nx) + b_n(t)\sin(nx)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin(nx).\end{aligned}$$

As condições fronteira estão formalmente satisfeitas. Substituindo na equação diferencial, obtém-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n'(t)\sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2b_n(t)\sin(nx) - 2t\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin(nx).$$

Por unicidade dos coeficientes de Fourier, para todo o n,

$$b_n'(t) = -(n^2 + 2t)b_n(t).$$

Segue-se que

$$b_n(t) = c_n e^{-n^2 t - t^2}$$

Logo, a função u é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t - t^2} \sin(nx).$$

A equação diferencial está formalmente satisfeita. Para garantir a condição inicial, devemos ter

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx) = u_0(x).$$

Deduz-se que os c_n's são

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_0(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_0(x)\sin(nx)\,dx.$$

3. A projecção de f em g é

$$\left(f, \frac{g}{\|g\|}\right)\frac{g}{\|g\|} = \frac{(f,g)}{\|g\|^2} g = \frac{\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx}{\int_{-1}^{1} g^2(x)\,dx} g(x).$$

4. Recorde-se que

$$(AX, Y) = (AX)^T Y = X^T A^T Y = (X, A^T Y),$$

e que o produto interno é simétrico $(X,Y) = (Y,X)$. Como A é anti-simétrica, $(AX,X) = (X, A^T X) = -(X, AX) = -(AX, X)$. Logo, $(AX,X) = 0$. Segue-se que a derivada do quadrado da norma de X é

$$\begin{aligned}
\left(\|X\|^2\right)' &= (X,X)' = (\dot{X}, X) + (X, \dot{X}) = 2(\dot{X}, X) \\
&= 2((I+A)X, X) = 2(X,X) + 2(AX, X) \\
&= 2\|X\|^2.
\end{aligned}$$

Este igualdade implica

$$\|X(t)\|^2 = e^{2t}\|X(0)\|^2.$$

Conclui-se

$$\|X(t)\| = e^t \|X(0)\|.$$

B

Cálculo Diferencial e Integral III

2º Mini-Teste - 28 de Novembro de 2024

LEAer

Resolução

1.

a)

$$(D^2-4)y=(D-2)(D+2)y=0 \Leftrightarrow y=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}.$$

b)

$$(D^2+4)y=0 \Leftrightarrow y=c_1\cos(2t)+c_2\sin(2t).$$

c) A equação

$$\begin{aligned}((D-1)^2-4)(D-3)y &= (D-1-2)(D-1+2)(D-3)y\\ &= (D-3)^2(D+1)y=0\end{aligned}$$

tem como solução geral

$$y=c_1e^{3t}+c_2te^{3t}+c_3e^{-t}.$$

d) A equação $(D-3)^2y=2+e^{3t}$ tem como solução geral

$$y=c_1e^{3t}+c_2te^{3t}+\frac{t^2}{2}e^{3t}+\frac{2}{9}.$$

2. Atendendo às condições fronteira de Dirichlet homogéneas, para cada t fixo prolongamos $u(\,\cdot\,,t)$ como função ímpar em x e periódica de período 2π. O prolongamento pode ser desenvolvido em série de Fourier:

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}[a_n(t)\cos(nx)+b_n(t)\sin(nx)]\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}b_n(t)\sin(nx).\end{aligned}$$

As condições fronteira estão formalmente satisfeitas. Substituindo na equação diferencial, obtém-se

$$\sum_{n=0}^{\infty}b_n'(t)\sin(nx)=\sum_{n=1}^{\infty}-2n^2tb_n(t)\sin(nx)-\sum_{n=1}^{\infty}b_n(t)\sin(nx).$$

Por unicidade dos coeficientes de Fourier, para todo o n,

$$b_n'(t) = -(2n^2t+1)b_n(t).$$

Segue-se que

$$b_n(t) = c_n e^{-n^2t^2-t}$$

Logo, a função u é

$$u(x,t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2t^2-t}\sin(nx).$$

A equação diferencial está formalmente satisfeita. Para garantir a condição inicial, devemos ter

$$u(x,0) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx) \;=\; u_0(x).$$

Deduz-se que os c_n's são

$$c_n \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_0(x)\sin(nx)\,dx \;=\; \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_0(x)\sin(nx)\,dx.$$

3. A projecção de g em f é

$$\left(g, \frac{f}{\|f\|}\right)\frac{f}{\|f\|} = \frac{(f,g)}{\|f\|^2} f = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx}{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx} f(x).$$

4. Recorde-se que

$$(AX,Y) = (AX)^TY = X^TA^TY = (X,A^TY),$$

e que o produto interno é simétrico $(X,Y) = (Y,X)$. Como A é anti-simétrica, $(AX,X) = (X,A^TX) = -(X,AX) = -(AX,X)$. Logo, $(AX,X) = 0$. Segue-se que a derivada do quadrado da norma de X é

$$\begin{aligned}
\left(\|X\|^2\right)' \;&=\; (X,X)' = (\dot{X},X) + (X,\dot{X}) \;=\; 2(\dot{X},X) \\
&=\; 2((-I+A)X,X) \;=\; -2(X,X) + 2(AX,X) \\
&=\; -2\|X\|^2.
\end{aligned}$$

Este igualdade implica

$$\|X(t)\|^2 = e^{-2t}\|X(0)\|^2.$$

Conclui-se

$$\|X(t)\| = e^{-t}\|X(0)\|.$$