A

Cálculo Diferencial e Integral III

2º Mini-Teste - 30 de Novembro de 2023

LEAer

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Sejam α, $\beta \in \mathbb{R}$, e seja $\mu \in \mathbb{R}^+$. Determine a solução geral de (7)

$$y'' - \mu^2 y = \alpha \cosh(\mu t) + \beta \sinh(\mu t).$$

Nota: $\cosh s = \frac{e^s + e^{-s}}{2}$, $\sinh s = \frac{e^s - e^{-s}}{2}$, $(\cosh s)' = \sinh s$, $(\sinh s)' = \cosh s$.

2. Determine a solução de (9)

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{t} u_{xx} + 1 + t^3 & \text{para } (x,t) \in [0,\pi] \times [1, +\infty[, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & \text{para } t \in [1, +\infty[, \\ u(x,1) = u_1(x) & \text{para } x \in [0,\pi], \end{cases}$$

onde u_1 é uma função dada.

3. Suponha que $\lambda \in \mathbb{R}^+$ é um valor próprio de A com multiplicidade algébrica igual a 2 e com multiplicidade geométrica igual a 1, correspondendo-lhe o vector próprio v e o vector próprio generalizado w. Determine as soluções de (4)

$$X'' = AX$$

da forma

$$X(t) = c(t)v + d(t)w.$$

B

Cálculo Diferencial e Integral III

2º Mini-Teste - 30 de Novembro de 2023

LEAer

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Sejam α, $\beta \in \mathbb{R}$, e seja $\mu \in \mathbb{R}^+$. Determine a solução geral de (7)

$$y'' + \mu^2 y = \alpha \cos(\mu t) + \beta \sin(\mu t).$$

2. Determine a solução de (9)

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{t} u_{xx} + t + t^2 & \text{para } (x,t) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [1, +\infty[, \\ u_x(0,t) = u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0 & \text{para } t \in [1, +\infty[, \\ u(x,1) = u_1(x) & \text{para } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \end{cases}$$

onde u_1 é uma função dada.

3. Suponha que $\lambda \in \mathbb{R}^-$ é um valor próprio de A com multiplicidade algébrica igual a 2 e com multiplicidade geométrica igual a 1, correspondendo-lhe o vector próprio v e o vector próprio generalizado w. Determine as soluções de (4)

$$X'' = AX$$

da forma

$$X(t) = c(t)v + d(t)w.$$

A

Cálculo Diferencial e Integral III

2º Mini-Teste - 30 de Novembro de 2023

LEAer

Resolução

1.

$$\begin{aligned}&(D^2-\mu^2)y=\alpha\cosh(\mu t)+\beta\sinh(\mu t) \;\Rightarrow\; (D^2-\mu^2)^2y=0\\ &\qquad\Leftrightarrow y=\gamma\cosh(\mu t)+\delta\sinh(\mu t)+c_3t\cosh(\mu t)+c_4t\sinh(\mu t).\end{aligned}$$

Substituindo na equação original, obtém-se

$$\begin{aligned}&(D^2-\mu^2)(\gamma\cosh(\mu t)+\delta\sinh(\mu t)+c_3t\cosh(\mu t)+c_4t\sinh(\mu t))\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad=\alpha\cosh(\mu t)+\beta\sinh(\mu t)\\ &\quad\Leftrightarrow (D^2-\mu^2)(c_3t\cosh(\mu t)+c_4t\sinh(\mu t))=\alpha\cosh(\mu t)+\beta\sinh(\mu t).\end{aligned}$$

Uma vez que

$$D^2(uv)=u''v+2u'v'+uv'',$$

tem-se

$$\begin{aligned}(D^2-\mu^2)(t\cosh(\mu t)) &= 2\mu\sinh(\mu t)+\mu^2t\cosh(\mu t)-\mu^2t\cosh(\mu t)\\ &= 2\mu\sinh(\mu t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(D^2-\mu^2)(t\sinh(\mu t)) &= 2\mu\cosh(\mu t)+\mu^2t\sinh(\mu t)-\mu^2t\sinh(\mu t)\\ &= 2\mu\cosh(\mu t),\end{aligned}$$

A solução geral da equação é

$$y(t)=\gamma\cosh(\mu t)+\delta\sinh(\mu t)+\frac{\alpha}{2\mu}t\sinh(\mu t)+\frac{\beta}{2\mu}t\cosh(\mu t),$$

onde γ e $\delta\in\mathbb{R}$.

2. Atendendo às condições fronteira de Neumann homogéneas, para cada t fixo prolongamos $u(\,\cdot\,,t)$ como função par em x e periódica de período 2π. O prolongamento pode ser desenvolvido em série de Fourier:

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}[a_n(t)\cos(nx)+b_n(t)\sin(nx)]\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}a_n(t)\cos(nx).\end{aligned}$$

As condições fronteira estão formalmente satisfeitas. Substituindo na equação diferencial, obtém-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n'(t)\cos(nx) = 1 + t^3 + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n^2}{t} a_n(t)\cos(nx).$$

Por unicidade dos coeficientes de Fourier, vem

$$\begin{aligned}
a_0'(t) &= 1 + t^3, \\
a_n'(t) &= -\frac{n^2}{t} a_n(t), \text{ para } n > 0, \\
a_0(t) &= c_0 + t + \frac{t^4}{4}, \\
a_n(t) &= c_n e^{-\int \frac{n^2}{t}\,dt} = c_n e^{-n^2 \ln t} = c_n t^{-n^2} = \frac{c_n}{t^{n^2}}, \text{ para } n > 0.
\end{aligned}$$

Logo, a função u é

$$u(x,t) = c_0 + t + \frac{t^4}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{t^{n^2}} \cos(nx).$$

A equação diferencial está formalmente satisfeita. Para garantir a condição inicial, devemos ter

$$u(x,1) = c_0 + \frac{5}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(nx) = u_1(x).$$

Deduz-se que os c_n's são

$$\begin{aligned}
c_0 + \frac{5}{4} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_1(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} u_1(x)\,dx, \\
c_0 &= -\frac{5}{4} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} u_1(x)\,dx, \\
c_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_1(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_1(x)\cos(nx)\,dx, \text{ para } n > 0.
\end{aligned}$$

3. Substituindo $X = cv + dw$ na equação diferencial e atendendo a que $Av = \lambda v$ e $Aw = \lambda w + v$, vem

$$X'' = c''v + d''w = AX = A(cv + dw) = \lambda cv + d(\lambda w + v) = (\lambda c + d)v + \lambda dw.$$

Portanto, devemos ter

$$\begin{aligned}
c''(t) &= \lambda c(t) + d(t), \\
d''(t) &= \lambda d(t).
\end{aligned}$$

Como λ é positivo, existe $\mu > 0$ tal que $\lambda = \mu^2$. A equação para d pode escrever-se na forma

$$(D^2 - \mu^2)d = 0.$$

Logo,

$$d = \alpha \cosh(\mu t) + \beta \sinh(\mu t).$$

Segue-se que

$$(D^2 - \mu^2)c = \alpha \cosh(\mu t) + \beta \sinh(\mu t).$$

Da resposta à pergunta **1** tira-se que

$$c(t) = \gamma \cosh(\mu t) + \delta \sinh(\mu t) + \frac{\alpha}{2\mu} t \sinh(\mu t) + \frac{\beta}{2\mu} t \cosh(\mu t),$$

Conclui-se que

$$\begin{aligned} X(t) &= \left(\gamma \cosh(\mu t) + \delta \sinh(\mu t) + \frac{\alpha}{2\mu} t \sinh(\mu t) + \frac{\beta}{2\mu} t \cosh(\mu t)\right) v \\ &\quad + (\alpha \cosh(\mu t) + \beta \sinh(\mu t))\, w \\ &= \gamma \cosh(\mu t) v + \delta \sinh(\mu t) v + \alpha \left(\frac{t}{2\mu} \sinh(\mu t) v + \cosh(\mu t) w\right) \\ &\quad + \beta \left(\frac{t}{2\mu} \cosh(\mu t) v + \sinh(\mu t) w\right). \end{aligned}$$

B

Cálculo Diferencial e Integral III

2º Mini-Teste - 30 de Novembro de 2023

LEAer

Resolução

1.

$$(D^2+\mu^2)y=\alpha\cos(\mu t)+\beta\sin(\mu t) \;\Rightarrow\; (D^2+\mu^2)^2y=0$$
$$\Leftrightarrow y=\gamma\cos(\mu t)+\delta\sin(\mu t)+c_3t\cos(\mu t)+c_4t\sin(\mu t).$$

Substituindo na equação original, obtém-se

$$\begin{aligned}(D^2+\mu^2)(\gamma\cos(\mu t)+\delta\sin(\mu t)+c_3t\cos(\mu t)+c_4t\sin(\mu t))&\\ =\alpha\cos(\mu t)+\beta\sin(\mu t)&\\ \Leftrightarrow (D^2+\mu^2)(c_3t\cos(\mu t)+c_4t\sin(\mu t))=\alpha\cos(\mu t)+\beta\sin(\mu t).&\end{aligned}$$

Uma vez que

$$D^2(uv)=u''v+2u'v'+uv'',$$

tem-se

$$\begin{aligned}(D^2+\mu^2)(t\cos(\mu t)) &= -2\mu\sin(\mu t)+\mu^2t\cos(\mu t)+\mu^2t\cos(\mu t)\\ &= -2\mu\sin(\mu t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(D^2+\mu^2)(t\sin(\mu t)) &= 2\mu\cos(\mu t)+\mu^2t\sin(\mu t)+\mu^2t\sin(\mu t)\\ &= 2\mu\cos(\mu t),\end{aligned}$$

A solução geral da equação é

$$y(t)=\gamma\cos(\mu t)+\delta\sin(\mu t)+\frac{\alpha}{2\mu}t\sin(\mu t)-\frac{\beta}{2\mu}t\cos(\mu t),$$

onde γ e $\delta\in\mathbb{R}$.

2. Atendendo às condições fronteira de Neumann homogéneas, para cada t fixo prolongamos $u(\,\cdot\,,t)$ como função par em x e periódica de período π. O prolongamento pode ser desenvolvido em série de Fourier:

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}[a_n(t)\cos(2nx)+b_n(t)\sin(2nx)]\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}a_n(t)\cos(2nx)\end{aligned}$$

As condições fronteira estão formalmente satisfeitas. Substituindo na equação diferencial, obtém-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n'(t)\cos(2nx) = t + t^2 + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4n^2}{t} a_n(t)\cos(2nx)$$

Por unicidade dos coeficientes de Fourier, vem

$$\begin{aligned}
a_0'(t) &= t + t^2, \\
a_n'(t) &= -\frac{4n^2}{t} a_n(t), \text{ para } n > 0, \\
a_0(t) &= c_0 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}, \\
a_n(t) &= c_n e^{-\int \frac{4n^2}{t}\,dt} = c_n e^{-4n^2 \ln t} = c_n t^{-4n^2} = \frac{c_n}{t^{4n^2}}, \text{ para } n > 0.
\end{aligned}$$

Logo, a função u é

$$u(x,t) = c_0 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{t^{4n^2}} \cos(2nx).$$

A equação diferencial está formalmente satisfeita. Para garantir a condição inicial, devemos ter

$$u(x,1) = c_0 + \frac{5}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(2nx) = u_1(x).$$

Deduz-se que os c_n's são

$$\begin{aligned}
c_0 + \frac{5}{6} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u_1(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_1(x)\,dx, \\
c_0 &= -\frac{5}{6} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_1(x)\,dx, \\
c_n &= \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u_1(x)\cos(2nx)\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_1(x)\cos(2nx)\,dx, \text{ para } n > 0.
\end{aligned}$$

3. Substituindo $X = cv + dw$ na equação diferencial e atendendo a que $Av = \lambda v$ e $Aw = \lambda w + v$, vem

$$X'' = c''v + d''w = AX = A(cv + dw) = \lambda cv + d(\lambda w + v) = (\lambda c + d)v + \lambda dw.$$

Portanto, devemos ter

$$\begin{aligned} c''(t) &= \lambda c(t) + d(t), \\ d''(t) &= \lambda d(t). \end{aligned}$$

Como λ é negativo, existe $\mu > 0$ tal que $\lambda = -\mu^2$. A equação para d pode escrever-se na forma

$$(D^2 + \mu^2)d = 0.$$

Logo,

$$d = \alpha \cos(\mu t) + \beta \sin(\mu t).$$

Segue-se que

$$(D^2 + \mu^2)c = \alpha \cos(\mu t) + \beta \sin(\mu t).$$

Da resposta à pergunta **1** tira-se que

$$c(t) = \gamma \cos(\mu t) + \delta \sin(\mu t) + \frac{\alpha}{2\mu} t \sin(\mu t) - \frac{\beta}{2\mu} t \cos(\mu t),$$

Conclui-se que

$$\begin{aligned} X(t) &= \left(\gamma \cos(\mu t) + \delta \sin(\mu t) + \frac{\alpha}{2\mu} t \sin(\mu t) - \frac{\beta}{2\mu} t \cos(\mu t) \right) v \\ &\quad + (\alpha \cos(\mu t) + \beta \sin(\mu t))\, w \\ &= \gamma \cos(\mu t) v + \delta \sin(\mu t) v + \alpha \left(\frac{t}{2\mu} \sin(\mu t) v + \cos(\mu t) w \right) \\ &\quad + \beta \left(-\frac{t}{2\mu} \cos(\mu t) v + \sin(\mu t) w \right). \end{aligned}$$