A

Cálculo Diferencial e Integral III

2º Mini-Teste - 7 de Dezembro de 2022

LMAC

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Seja (4)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule e^{At}. Determine ainda a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} X' = AX, \\ X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

2. Resolva o problema de valor inicial escrevendo y explicitamente e simplificando a resposta.

a) (4)

$$\begin{cases} yy' = t, \\ y(1) = -2. \end{cases}$$

b) (5)

$$\begin{cases} t^2y' + 3ty = e^t, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

c) (4)

$$\begin{cases} y' = (4 + y^2)t, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

3. Determine uma descrição paramétrica das curvas ortogonais a todos os elementos da família $\{\gamma_c,\ c > 0\}$, onde γ_c é a curva descrita parametricamente por (3)

$$t \mapsto (t, \tan(ct)), \quad \text{para } t \in \left(0, \frac{\pi}{2c}\right).$$

A

Cálculo Diferencial e Integral III

2º Mini-Teste - 7 de Dezembro de 2022

LMAC

Resolução

1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-2t}+1 & e^{-2t}-1 \\ e^{-2t}-1 & e^{-2t}+1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A solução do problema de valor inicial é

$$X(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2.

a) Usando a derivada da função composta, obtém-se

$$\frac{d}{dt}(y^2) = \frac{d}{dt}(t^2).$$

Integrando ambos os membros de 0 a t, vem

$$y^2 - 4 = t^2 - 1 \;\Leftrightarrow\; y = -\sqrt{3+t^2},$$

porque $y(1) < 0$.

b) Trata-se de uma equação linear. A forma canónica da equação é

$$y' + \frac{3}{t} y = \frac{e^t}{t^2}.$$

Um factor integrante é t^3. Logo, a equação é equivalente a

$$(t^3 y)' = te^t = ((t-1)e^t)'.$$

Integrando de 1 a t obtém-se

$$t^3 y - 2 = (t-1)e^t,$$

o que é equivalente a

$$y = \frac{2 + (t-1)e^t}{t^3}.$$

c) A equação é separável. A forma canónica é

$$\frac{1}{4+y^2} y' = t.$$

Esta equação é equivalente a

$$\frac{1/2}{1+(y/2)^2} y' = 2t,$$

ou seja,

$$\left(\arctan \frac{y}{2}\right)' = 2t = (t^2)'.$$

Integrando de 0 a t, obtém-se

$$\arctan \frac{y}{2} - \frac{\pi}{4} = \arctan \frac{y}{2} - \arctan 1 = t^2.$$

Resolvendo em ordem a y, conclui-se

$$y = 2 \tan \left(\frac{\pi}{4} + t^2\right).$$

3. A equação diferencial de primeira ordem cuja solução geral é o conjunto das funções da forma

$$y(t) = \tan(ct), \text{ para } c \in \mathbb{R}$$

é

$$y' = c \sec^2(ct) = c(1 + \tan^2(ct)) = \frac{\arctan y}{t}(1+y^2).$$

As curvas ortogonais satisfazem

$$y' = -\frac{t}{\arctan y \, (1+y^2)} \Leftrightarrow (1+y^2) \arctan y \, y' = -t.$$

Calculando a primitiva

$$\begin{aligned}
&\int (1+y^2)\arctan y\,dy = \left(y+\frac{y^3}{3}\right)\arctan y - \int \frac{y+\frac{y^3}{3}}{1+y^2}\,dy \\
&= \left(y+\frac{y^3}{3}\right)\arctan y - \int \frac{\frac{2y}{3}+\frac{y}{3}+\frac{y^3}{3}}{1+y^2}\,dy \\
&= \left(y+\frac{y^3}{3}\right)\arctan y - \frac{1}{3}\int \frac{2y}{1+y^2}\,dy - \frac{1}{3}\int y\,dy \\
&= \left(y+\frac{y^3}{3}\right)\arctan y - \frac{1}{3}\ln(1+y^2) - \frac{y^2}{6},
\end{aligned}$$

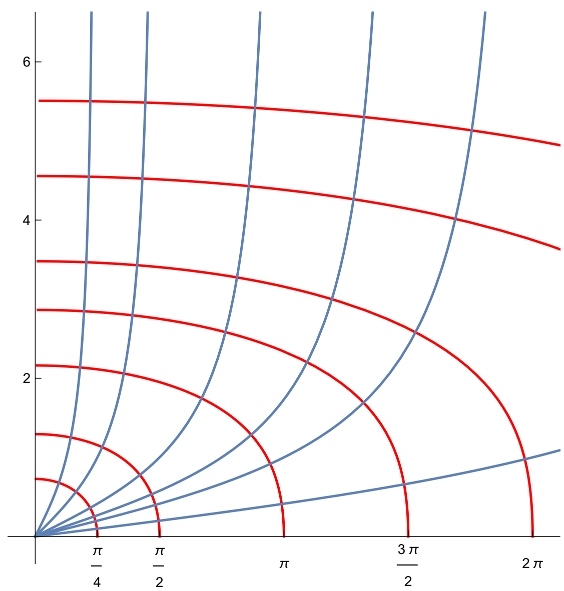
conclui-se que as curvas ortogonais satisfazem

$$\left(y+\frac{y^3}{3}\right)\arctan y - \frac{1}{3}\ln(1+y^2) - \frac{y^2}{6} = -\frac{t^2}{2} + d.$$

Mais precisamente, trata-se das curvas, η_d, descritas parametricamente por $(t_d(y), y)$, onde $d > 0$ e $t_d : (0, y_d) \to \mathbb{R}^+$ é definida por

$$t_d(y) = \sqrt{2d + \frac{2}{3}\ln(1+y^2) + \frac{y^2}{3} - 2\left(y+\frac{y^3}{3}\right)\arctan y},$$

com y_d o máximo do conjunto dos y's positivos tais que o radicando é não negativo no intervalo $[0, y]$.



As curvas γ_c para $c = 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8}$, a azul.
As curvas η_d para $\sqrt{2d} = \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi$, a encarnado.

B

Cálculo Diferencial e Integral III

2º Mini-Teste - 7 de Dezembro de 2022

LMAC

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Seja (4)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule e^{At}. Determine ainda a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} X' = AX, \\ X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

2. Resolva o problema de valor inicial escrevendo y explicitamente e simplificando a resposta.

a) (4)

$$\begin{cases} 4y^3y' = e^t, \\ y(4) = -e. \end{cases}$$

b) (5)

$$\begin{cases} ty' - 3y = t^5e^{-t}, \\ y(-1) = 2. \end{cases}$$

c) (4)

$$\begin{cases} y' = (9 + y^2)t^2, \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

3. Determine uma descrição paramétrica das curvas ortogonais a todos os elementos da família $\{\gamma_c,\ c > 0\}$, onde γ_c é a curva descrita parametricamente por (3)

$$t \mapsto (t, \tan(ct)), \quad \text{para } t \in \left(0, \frac{\pi}{2c}\right).$$

B

Cálculo Diferencial e Integral III

2º Mini-Teste - 7 de Dezembro de 2022

LMAC

Resolução

1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{2t} & -e^{2t} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+e^{2t} & 1-e^{2t} \\ 1-e^{2t} & 1+e^{2t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A solução do problema de valor inicial é

$$X(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

2.

a) Usando a derivada da função composta, obtém-se

$$\frac{d}{dt}(y^4) = \frac{d}{dt}(e^t).$$

Integrando ambos os membros de 0 a t, vem

$$y^4 - e^4 = e^t - e^4 \;\Leftrightarrow\; y = -e^{t/4},$$

porque $y(4) < 0$.

b) Trata-se de uma equação linear. A forma canónica da equação é

$$y' - \frac{3}{t} y = t^4 e^{-t}.$$

Um factor integrante é t^{-3}. Logo, a equação é equivalente a

$$\left(\frac{1}{t^3} y\right)' = t e^{-t} = -((t+1)e^{-t})'.$$

Integrando de -1 a t obtém-se

$$\frac{1}{t^3}y + 2 = -(t+1)e^{-t},$$

o que é equivalente a

$$y = -2t^3 - (t+1)t^3e^{-t}.$$

c) A equação é separável. A forma canónica é

$$\frac{1}{9+y^2}y' = t^2.$$

Esta equação é equivalente a

$$\frac{1/3}{1+(y/3)^2}y' = 3t^2,$$

ou seja,

$$\left(\arctan\frac{y}{3}\right)' = 3t^2 = (t^3)'.$$

Integrando de 0 a t, obtém-se

$$\arctan\frac{y}{3} - \frac{\pi}{4} = \arctan\frac{y}{3} - \arctan 1 = t^3.$$

Resolvendo em ordem a y, conclui-se

$$y = 3\tan\left(\frac{\pi}{4} + t^3\right).$$

3. A equação diferencial de primeira ordem cuja solução geral é o conjunto das funções da forma

$$y(t) = \tan(ct), \text{ para } c \in \mathbb{R}$$

é

$$y' = c\sec^2(ct) = c(1+\tan^2(ct)) = \frac{\arctan y}{t}(1+y^2).$$

As curvas ortogonais satisfazem

$$y' = -\frac{t}{\arctan y\,(1+y^2)} \;\Leftrightarrow\; (1+y^2)\arctan y\, y' = -t.$$

Calculando a primitiva

$$
\begin{aligned}
&\int (1+y^2)\arctan y\,dy = \left(y+\frac{y^3}{3}\right)\arctan y - \int \frac{y+\frac{y^3}{3}}{1+y^2}\,dy\\
&= \left(y+\frac{y^3}{3}\right)\arctan y - \int \frac{\frac{2y}{3}+\frac{y}{3}+\frac{y^3}{3}}{1+y^2}\,dy\\
&= \left(y+\frac{y^3}{3}\right)\arctan y - \frac{1}{3}\int \frac{2y}{1+y^2}\,dy - \frac{1}{3}\int y\,dy\\
&= \left(y+\frac{y^3}{3}\right)\arctan y - \frac{1}{3}\ln(1+y^2) - \frac{y^2}{6},
\end{aligned}
$$

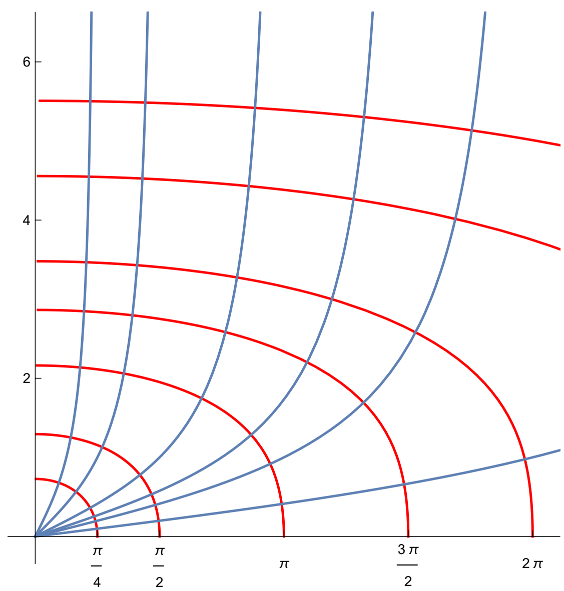
conclui-se que as curvas ortogonais satisfazem

$$\left(y+\frac{y^3}{3}\right)\arctan y - \frac{1}{3}\ln(1+y^2) - \frac{y^2}{6} = -\frac{t^2}{2} + d.$$

Mais precisamente, trata-se das curvas, η_d, descritas parametricamente por $(t_d(y), y)$, onde $d > 0$ e $t_d : (0, y_d) \to \mathbb{R}^+$ é definida por

$$t_d(y) = \sqrt{2d + \frac{2}{3}\ln(1+y^2) + \frac{y^2}{3} - 2\left(y+\frac{y^3}{3}\right)\arctan y},$$

com y_d o máximo do conjunto dos y's positivos tais que o radicando é não negativo no intervalo $[0, y]$.



As curvas γ_c para $c = 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8}$, a azul.
As curvas η_d para $\sqrt{2d} = \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi$, a encarnado.