Cálculo Diferencial e Integral III

2º Mini-Teste - 16 de Dezembro de 2021

LEAer

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Calcule e^{At}, para (6)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Resposta:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1+3t & -3t \\ 3t & 1-3t \end{bmatrix}.$$

2. Usando o método do aniquilador, determine a solução geral de (5)

$$y'' - 4y' + 4y = 8\cos(2t) + 8\sin(2t) + 1.$$

Resposta:

$$y = \alpha e^{2t} + \beta t e^{2t} + \cos(2t) - \sin(2t) + \frac{1}{4},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

3. Usando a transformada de Laplace, determine a solução de (5)

$$y' + y = \cos t, \quad y(0) = 0.$$

Resposta:

$$\begin{aligned} Y(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+1)} &= \frac{1}{2}\frac{s+1}{s^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+1}, \\ y(t) &= \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}e^{-t}. \end{aligned}$$

4. Seja A uma matriz com vectores próprios v e w, associados aos valores próprios λ e μ, respectivamente. Determine a solução de (4)

$$X' = AX + v, \quad X(0) = w.$$

Resposta: Usando a fórmula de variação das contantes e atendendo a que $e^{At}v = e^{\lambda t}v$, obtém-se $X(t) = e^{\mu t}w + \frac{e^{\lambda t}-1}{\lambda}v$, para $\lambda \neq 0$. No caso $\lambda = 0$, $X(t) = e^{\mu t}w + tv$.

Cálculo Diferencial e Integral III

2º Mini-Teste - 16 de Dezembro de 2021

LEAer

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Calcule e^{At}, para (6)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Resposta:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1+3t & -9t \\ t & 1-3t \end{bmatrix}.$$

2. Usando o método do aniquilador, determine a solução geral de (5)

$$y'' + 4y' + 4y = -17\cos(3t) - 7\sin(3t) + 1.$$

Resposta:

$$y = \alpha e^{-2t} + \beta t e^{-2t} + \cos(3t) - \sin(3t) + \frac{1}{4},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

3. Usando a transformada de Laplace, determine a solução de (5)

$$y' - y = \sin t, \quad y(0) = 0.$$

Resposta:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s-1)(s^2+1)} = -\frac{1}{2}\frac{s+1}{s^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-1}, \\ y(t) &= -\frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}e^t. \end{aligned}$$

4. Seja A uma matriz com vectores próprios v e w, associados aos valores próprios μ e λ, respectivamente. Determine a solução de (4)

$$X' = AX + v, \quad X(0) = w.$$

Resposta: Usando a fórmula de variação das contantes e atendendo a que $e^{At}v = e^{\mu t}v$, obtém-se $X(t) = e^{\lambda t}w + \frac{e^{\mu t}-1}{\mu}v$, para $\mu \neq 0$. No caso $\mu = 0$, $X(t) = e^{\lambda t}w + tv$.

Cálculo Diferencial e Integral III

2º Mini-Teste - 17 de Dezembro de 2021

LEAer

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Calcule e^{At}, para (6)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Resposta:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} e^t \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 1+4t & 4t \\ -4t & 1-4t \end{bmatrix}.$$

2. Usando o método do aniquilador, determine a solução geral de (5)

$$y' + y = te^{-t} + e^t.$$

Resposta:

$$y = \alpha e^{-t} + \frac{t^2}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

3. Usando a transformada de Laplace, determine a solução de (5)

$$y'' + 4y = 4t, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Resposta:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{4}{s^2(s^2+4)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4}, \\ y(t) &= t - \frac{1}{2}\sin(2t). \end{aligned}$$

4. Esboce o retrato de fase do sistema (4)

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X.$$

Cálculo Diferencial e Integral III

2º Mini-Teste - 17 de Dezembro de 2021

LEAer

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Calcule e^{At}, para (6)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Resposta:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} 1+2t & t \\ -4t & 1-2t \end{bmatrix}.$$

2. Usando o método do aniquilador, determine a solução geral de (5)

$$y' - y = \cos(2t) + 2e^t.$$

Resposta:

$$y = \alpha e^t - \frac{1}{5}\cos(2t) + \frac{2}{5}\sin(2t) + 2te^t, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

3. Usando a transformada de Laplace, determine a solução de (5)

$$y'' + 4y = 4t, \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

Resposta:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s^3+s^2+4}{s^2(s^2+4)} = \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s^2}, \\ y(t) &= t + \cos(2t). \end{aligned}$$

4. Esboce o retrato de fase do sistema (4)

$$X' = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X.$$