Cálculo Diferencial e Integral III

Repescagem do 1º Mini-Teste - 17 de Janeiro de 2024

LEAer

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Determine a solução do problema de valor inicial (7)

$$y' + y\tan t = \tan t, \quad y(0) = 3.$$

2. Fazendo a substituição $v = \frac{y}{t}$, determine todas as soluções da equação homogénea (8)

$$y' = \left(\frac{y}{t}\right)^2 + \frac{y}{t}, \quad t > 0,$$

bem como a solução que satisfaz $y(1) = 1$.

3. A equação diferencial (3)

$$ty'' - (1+2t)y' + (1+t)y = 0, \quad t > 0,$$

admite como solução $y = e^t$. Usando o método da redução de ordem, determine a solução geral da equação.

4. Suponha que (2)

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 + \int_0^t z(s)\,ds, \\ z(t) &= \int_0^t y(s)\,ds. \end{aligned}$$

Determine uma função $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$y(t) = 1 + \int_0^t k(t,s)y(s)\,ds,$$

ou prove que tal função não existe.

Cálculo Diferencial e Integral III

Repescagem do 1º Mini-Teste - 17 de Janeiro de 2024

LEAer

Resolução

1. Um factor integrante é

$$e^{\int \tan t\, dt} = e^{\int \frac{\sin t}{\cos t}\, dt} = e^{-\ln|\cos t|} = \frac{1}{|\cos t|}.$$

Podemos escolher $\frac{1}{\cos t}$ como factor integrante. Multiplicando ambos os membros da equação diferencial pelo factor integrante obtém-se

$$\frac{1}{\cos t}y' + \frac{\sin t}{\cos^2 t}y = \frac{\sin t}{\cos^2 t},$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{\cos t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\cos t}\right).$$

Primitivando ambos os membros da equação diferencial obtém-se

$$\frac{y}{\cos t} = \frac{1}{\cos t} + c.$$

Assim,

$$y = 1 + c\cos t.$$

Para que $y(0) = 3$ deve escolher-se $c = 2$. Conclui-se que

$$y = 1 + 2\cos t.$$

2. Definindo $v = \frac{y}{t}$, tem-se $y = tv$ e $y' = v + tv'$. Assim,

$$tv' + v = v^2 + v.$$

Simplificando,

$$tv' = v^2. \tag{1}$$

Esta equação é separável, sendo a sua forma canónica

$$\frac{1}{v^2}v' = \frac{1}{t}. \tag{2}$$

As equações (1) e (2) são equivalentes se v é diferente de zero. Mas $v = 0$ é uma solução de (1) para a qual (2) não faz sentido. $v = 0$ corresponde a $y = 0$. Primitivando ambos os membros de (2) em ordem a t,

$$-\frac{1}{v} = \ln t + c,$$

ou seja,

$$v = -\frac{1}{\ln t + c}.$$

Logo, tem-se

$$y = -\frac{t}{\ln t + c}, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

As soluções da equação diferencial do enunciado são a função indenticamente nula e as funções definidas por (3). A solução que satisfaz $y(1) = 1$ é

$$y = \frac{t}{1 - \ln t}.$$

3. O Wronskiano satisfaz

$$W' = \frac{1 + 2t}{t} W \;\Leftrightarrow\; W' = \left(\frac{1}{t} + 2\right) W.$$

Logo,

$$W = ce^{\int \left(\frac{1}{t}+2\right)\, dt} = cte^{2t}.$$

Sem perda de generalidade podemos escolher $c = 1$,

$$W = te^{2t}.$$

Atendendo à definição do Wronskiano,

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = te^{2t} \quad \Leftrightarrow \quad e^t y_2' - e^t y_2 = te^{2t}.$$

A última igualdade simplifica-se para

$$y_2' - y_2 = te^t \quad \Leftrightarrow \quad (D - 1) y_2 = te^t.$$

A solução geral desta equação é

$$y_2 = \gamma e^t + \frac{t^2}{2} e^t, \qquad \gamma \in \mathbb{R}.$$

A solução geral da equação do enunciado obtém-se multiplicando este y_2 por uma constante porque o Wronskiano pode ser um múltiplo do usado acima com a escolha $c = 1$. A solução geral é

$$y_2 = \alpha e^t + \beta t^2 e^t, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

4.

$$z(s) = \int_0^s y(\tau)\, d\tau$$

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 + \int_0^t \int_0^s y(\tau)\, d\tau ds \\ &= 1 + \int_0^t \int_\tau^t y(\tau)\, ds d\tau \\ &= 1 + \int_0^t (t-\tau) y(\tau)\, d\tau \\ &= 1 + \int_0^t (t-s) y(s)\, ds \\ &= 1 + \int_0^t k(t,s) y(s)\, ds, \end{aligned}$$

com

$$k(t,s) = (t-s).$$