A

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Mini-Teste - 19 de Outubro de 2023

LEAer

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Considere a equação diferencial

$$y' = e^{-|y|}.$$

a) Esboce o seu campo de direcções e os gráficos das soluções. (3)

b) Considere a solução que satisfaz $y(0) = 0$. Qual é a sua expressão quando t é positivo? Qual a sua expressão quando t é negativo? As soluções da equação diferencial são limitadas? (5)

2. Obtenha a solução do problema de valor inicial (5)

$$\begin{cases} y' + \frac{1}{t\ln t} y = t, \\ y(e) = 0, \end{cases}$$

simplificando a resposta.

3. Determine um factor integrante da forma $\mu(ty)$ para a equação diferencial (4)

$$(10ty + 4y^2) + (8t^2 + 5ty)y' = 0.$$

Não resolva a equação.

4. Avalie se a função é Lipschitziana, justificando cuidadosamente.

a) $y \mapsto e^{-|y|}$. (1.5)

b) $y \mapsto e^{|y|}$. (1.5)

B

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Mini-Teste - 19 de Outubro de 2023

LEAer

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Considere a equação diferencial

$$y' = e^{|y|}.$$

a) Esboce o seu campo de direcções e os gráficos das soluções. (3)

b) Considere a solução que satisfaz $y(0) = 0$. Qual é a sua expressão quando t é positivo? Qual a sua expressão quando t é negativo? Qual é o intervalo máximo de existência desta solução? (5)

2. Obtenha a solução do problema de valor inicial (5)

$$\begin{cases} y' - \frac{1}{t\ln t}y = te^t \ln t, \\ y(e) = -e^e, \end{cases}$$

simplificando a resposta.

3. Determine um factor integrante da forma $\mu(ty)$ para a equação diferencial (4)

$$(5ty + 8y^2) + (4t^2 + 10ty)y' = 0.$$

Não resolva a equação.

4. Avalie se a função é Lipschitziana, justificando cuidadosamente.

a) $y \mapsto e^{-|y|}$. (1.5)

b) $y \mapsto e^{|y|}$. (1.5)

A

Cálculo Diferencial e Integral III

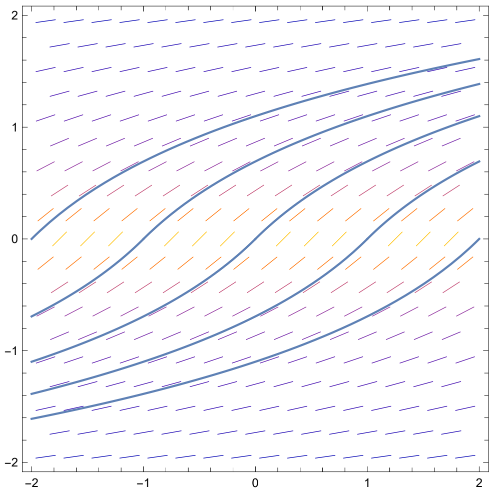
1º Mini-Teste - 19 de Outubro de 2023

LEAer

Resolução

1.

a)



b) Consideremos a solução que satisfaz $y(0) = 0$. Se $t > 0$, então $y > 0$ e a equação diferencial é $y' = e^{-y}$. Se $t < 0$, então $y < 0$ e a equação diferencial é $y' = e^{y}$. Estas equações são separáveis. Resolvendo a primeira, vem

$$y' = e^{-y} \;\Leftrightarrow\; e^{y}y' = 1 \;\Leftrightarrow\; (e^{y})' = 1 \;\Leftarrow\; e^{y} = t + 1 \;\Leftrightarrow\; y = \ln(t+1),$$

sendo que esta solução satisfaz $y(0) = 0$. A solução da equação do enunciado que satisfaz $y(0) = 0$ é

$$y(t) = \begin{cases} -\ln(1-t), & t \leq 0, \\ \ln(1+t), & t > 0. \end{cases}$$

Note-se que é uma função ímpar. Tem-se

$$\lim_{t\to-\infty} y(t) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty.$$

Esta solução não é limitada. Como a equação é autónoma, as outras soluções são $t \mapsto y(t - t_0)$. Nenhuma solução é limitada.

2.

$$\begin{cases} y' + \frac{1}{t\ln t}y = t, \\ y(e) = 0. \end{cases}$$

A equação é linear. Um factor integrante é

$$e^{\int \frac{1}{t\ln t}\,dt} = e^{\ln(\ln t)} = \ln t.$$

Multiplicando ambos os membros da equação pelo factor integrante, obtém-se

$$\ln t\, y' + \frac{1}{t}y = t\ln t \;\Leftrightarrow\; (\ln t\, y)' = t\ln t.$$

A primitiva de $t\ln t$ é

$$\int t\ln t\, dt = \frac{t^2}{2}\ln t - \int \frac{t}{2}\, dt = \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4}.$$

Integrando ambos os membros da equação diferencial de e a t, obtém-se

$$\ln t\, y - \ln e\, y(e) = \left(\frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4}\right) - \left(\frac{e^2}{2}\ln e - \frac{e^2}{4}\right).$$

Usando $y(e) = 0$, vem

$$\ln t\, y = \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4} - \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{4} = \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4} - \frac{1}{4}e^2.$$

A solução é

$$y = \frac{t^2}{2} - \frac{t^2 + e^2}{4\ln t}.$$

3. Multiplicando ambos os membros da equação diferencial por $\mu(ty)$, vem

$$\mu(ty)(10ty + 4y^2) + \mu(ty)(8t^2 + 5ty)y' = 0.$$

Esta equação é exacta se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}(\mu(ty)(10ty + 4y^2)) &= \frac{\partial}{\partial t}(\mu(ty)(8t^2 + 5ty)), \\
(10ty + 4y^2)t\mu' + (10t + 8y)\mu &= (8t^2 + 5ty)y\mu' + (16t + 5y)\mu, \\
((10t^2y + 4ty^2) - (8t^2y + 5ty^2))\mu' &= ((16t + 5y) - (10t + 8y))\mu, \\
(2t^2y - ty^2)\mu' &= (6t - 3y)\mu, \\
ty\mu' &= 3\mu, \\
\mu'(ty) &= \frac{3}{ty}\mu(ty), \\
\mu'(s) &= \frac{3}{s}\mu, \qquad s := ty, \\
\mu(s) &= s^3, \\
\mu(ty) &= (ty)^3.
\end{aligned}$$

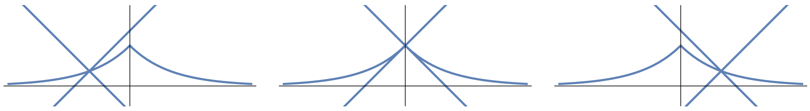
4.

a) **Primeira resposta.** Dado um ponto $(y_0, e^{-|y_0|})$, o gráfico de $y \mapsto e^{-|y|}$ está contido na região

$$\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : e^{-|y_0|} - |y - y_0| \le z \le e^{-|y_0|} + |y - y_0|\},$$

ou seja, em

$$\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : \left|z - e^{-|y_0|}\right| \le |y - y_0|\}.$$



Portanto, a função $y \mapsto e^{-|y|}$ é Lipschitziana com constante de Lipschitz igual a 1.

Resposta alternativa. Dizemos que f é seccionalmente C^1 no intervalo fechado I se f é contínua em I e se existe uma partição de I tal que a restrição de f a cada um dos subintervalos fechados definidos pela partição é C^1.

Seja f seccionalmente C^1 com $|f'| \le L$. Então f é Lipshchitz com constante de Lipschitz igual a L. Aqui, num ponto y_1 de descontinuidade de f', por $|f'|(y_1)$ entende-se $\max\{|f'^{-}(y_1)|, |f'^{+}(y_1)|\}$. Com efeito, uma vez que f é seccionalmente C^1 em I, para y_0, $y \in I$, tem-se

$$f(y) - f(y_0) = \int_{y_0}^{y} f'(s)\,ds.$$

Logo,

$$|f(y) - f(y_0)| \le \left|\int_{y_0}^{y} |f'(s)|\,ds\right| \le \left|\int_{y_0}^{y} L\,ds\right| = L|y - y_0|.$$

A função $y \mapsto e^{-|y|}$ é seccionalmente C^1 com $|f'| \le 1$. Portanto, f é Lipschitz com constante de Lipschitz igual a 1.

b) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(y) = e^{|y|}$. Tem-se

$$\left|\frac{g(y) - g(0)}{y - 0}\right| = \frac{e^{|y|} - 1}{|y|} \longrightarrow +\infty \quad \text{quando } |y| \to +\infty.$$

Portanto, a função g não é Lipschitziana.

B

Cálculo Diferencial e Integral III

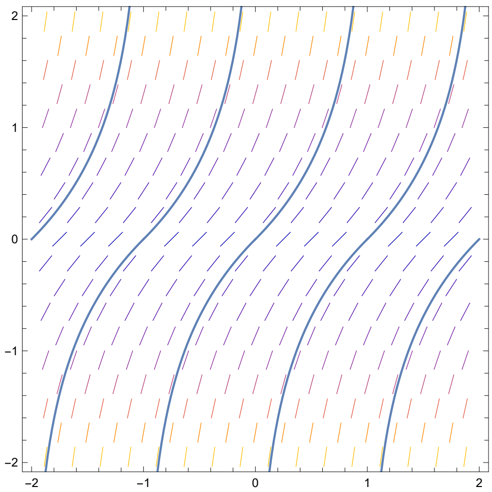
1º Mini-Teste - 19 de Outubro de 2023

LEAer

Resolução

1.

a)



b) Consideremos a solução que satisfaz $y(0) = 0$. Se $t > 0$, então $y > 0$ e a equação diferencial é $y' = e^y$. Se $t < 0$, então $y < 0$ e a equação diferencial é $y' = e^{-y}$. Estas equações são separáveis. Resolvendo a primeira, vem

$$y' = e^y \Leftrightarrow e^{-y}y' = 1 \Leftrightarrow (e^{-y})' = -1 \Leftarrow e^{-y} = -t+1 \Leftrightarrow y = -\ln(1-t),$$

sendo que esta solução satisfaz $y(0) = 0$. A solução da equação do enunciado que satisfaz $y(0) = 0$ é

$$y(t) = \begin{cases} \ln(1+t), & -1 < t \leq 0, \\ -\ln(1-t), & 0 < t < 1. \end{cases}$$

Note-se que é uma função ímpar. Esta solução está definida no intervalo $]-1, 1[$.

2.

$$\begin{cases} y' - \frac{1}{t\ln t}y = te^t \ln t, \\ y(e) = -e^e. \end{cases}$$

A equação é linear. Um factor integrante é

$$e^{-\int \frac{1}{t\ln t}\,dt} = e^{-\ln(\ln t)} = \frac{1}{\ln t}.$$

Multiplicando ambos os membros da equação pelo factor integrante, obtém-se

$$\frac{1}{\ln t}\,y' - \frac{t}{(\ln t)^2}y = te^t \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{1}{\ln t}\,y\right)' = te^t.$$

A primitiva de te^t é

$$\int te^t\,dt = te^t - \int e^t\,dt = te^t - e^t.$$

Integrando ambos os membros da equação diferencial de e a t, obtém-se

$$\frac{1}{\ln t}\,y - \frac{1}{\ln e}\,y(e) = (t-1)e^t - (e-1)e^e.$$

Usando $y(e) = -e^e$, vem

$$\frac{1}{\ln t}\,y = (t-1)e^t - (e-1)e^e - e^e = (t-1)e^t - e^{e+1}.$$

A solução é

$$y = \left((t-1)e^t - e^{e+1}\right)\ln t.$$

3. Multiplicando ambos os membros da equação diferencial por $\mu(ty)$, vem

$$\mu(ty)(5ty+8y^2) + \mu(ty)(4t^2+10ty)y' = 0.$$

Esta equação é exacta se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}(\mu(ty)(5ty+8y^2)) &= \frac{\partial}{\partial t}(\mu(ty)(4t^2+10ty)),\\
(5ty+8y^2)t\mu' + (5t+16y)\mu &= (4t^2+10ty)y\mu' + (8t+10y)\mu,\\
((5t^2y+8ty^2)-(4t^2y+10ty^2))\mu' &= ((8t+10y)-(5t+16y))\mu,\\
(t^2y-2ty^2)\mu' &= (3t-6y)\mu,\\
ty\mu' &= 3\mu,\\
\mu'(ty) &= \frac{3}{ty}\mu(ty),\\
\mu'(s) &= \frac{3}{s}\mu, \qquad s := ty,\\
\mu(s) &= s^3,\\
\mu(ty) &= (ty)^3.
\end{aligned}$$

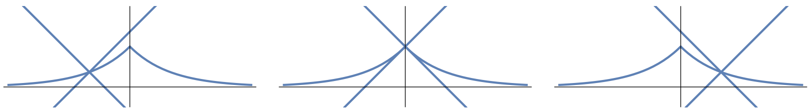
4.

a) **Primeira resposta.** Dado um ponto $(y_0, e^{-|y_0|})$, o gráfico de $y \mapsto e^{-|y|}$ está contido na região

$$\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : e^{-|y_0|} - |y - y_0| \le z \le e^{-|y_0|} + |y - y_0|\},$$

ou seja, em

$$\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : \left|z - e^{-|y_0|}\right| \le |y - y_0|\}.$$



Portanto, a função $y \mapsto e^{-|y|}$ é Lipschitziana com constante de Lipschitz igual a 1.

Resposta alternativa. Dizemos que f é seccionalmente C^1 no intervalo fechado I se f é contínua em I e se existe uma partição de I tal que a restrição de f a cada um dos subintervalos fechados definidos pela partição é C^1.

Seja f seccionalmente C^1 com $|f'| \le L$. Então f é Lipshchitz com constante de Lipschitz igual a L. Aqui, num ponto y_1 de descontinuidade de f', por $|f'|(y_1)$ entende-se $\max\{|f'^{-}(y_1)|, |f'^{+}(y_1)|\}$. Com efeito, uma vez que f é seccionalmente C^1 em I, para y_0, $y \in I$, tem-se

$$f(y) - f(y_0) = \int_{y_0}^{y} f'(s)\, ds.$$

Logo,

$$|f(y) - f(y_0)| \le \left| \int_{y_0}^{y} |f'(s)|\, ds \right| \le \left| \int_{y_0}^{y} L\, ds \right| = L|y - y_0|.$$

A função $y \mapsto e^{-|y|}$ é seccionalmente C^1 com $|f'| \le 1$. Portanto, f é Lipschitz com constante de Lipschitz igual a 1.

b) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(y) = e^{|y|}$. Tem-se

$$\left| \frac{g(y) - g(0)}{y - 0} \right| = \frac{e^{|y|} - 1}{|y|} \longrightarrow +\infty \quad \text{quando } |y| \to +\infty.$$

Portanto, a função g não é Lipschitziana.