Cálculo Diferencial e Integral III

1º Mini-Teste - 27 de Outubro de 2022

LMAC

Duração: 45 minutos

Apresente os cálculos

1. Seja $R > 0$. Considere a superfície (5)

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{3(x^2 + y^2)} = z < \sqrt{3}R\right\}$$

com densidade de massa igual a z. Calcule a massa de M.
Resposta: $g(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \sqrt{3}r)$, com $(r, \theta) \in (0, R) \times (0, 2\pi)$.
$\|g_r \times g_\theta\| = 2r$.
A massa de M é $\iint_M z\, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^R \sqrt{3}r \cdot 2r\, drd\theta = \frac{4\sqrt{3}}{3}\pi R^3$.

2. Seja $R > 0$. Considere o domínio

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{3(x^2 + y^2)} < z < \sqrt{3}R\right\}$$

e o campo vectorial $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por $f(x, y, z) = (x, y, z)$.

a) Usando a definição, calcule o fluxo de f através da fronteira de Ω, orientada com a normal a apontar para o exterior de Ω. (4)

b) Verifique o resultado da alínea anterior usando o Teorema da Divergência. (4)

Resposta: Como o campo é radial, o fluxo de f através da fronteira de Ω é igual ao fluxo de f através de $\left\{(x, y, z) : z = \sqrt{3}R \text{ e } \sqrt{x^2 + y^2} < R\right\}$. Neste disco, $f \cdot n = z = \sqrt{3}R$. Logo, o fluxo de f através da fronteira de Ω é $\sqrt{3}\pi R^3$. Por outro lado, uma vez que $\operatorname{div} f = 3$, tem-se

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} f\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{3}R} 3r\, dzdrd\theta = \sqrt{3}\pi R^3.$$

3. Seja $0 < \rho < R$. Considere a superfície

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 = \rho^2 \text{ e } z > 0\right\},$$

orientada com normal com terceira componente positiva, e o campo vectorial $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $f(x, y, z) = (-y, x, z)$.

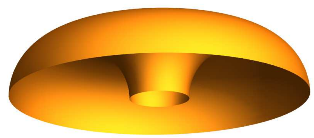
a) Calcule o fluxo do rotacional de f através de M. (5)

b) Existirá uma superfície N, regular, conexa e orientada, cuja fronteira coincida com a fronteira de M e tal que (2)

$$\iint_N \operatorname{rot} f \cdot n\, dS \neq \pm \iint_M \operatorname{rot} f \cdot n\, dS?$$

Em caso negativo justifique, e em caso afirmativo esboce uma.

Resposta: O esboço da superfície M é

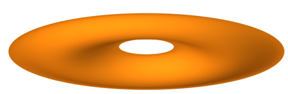


.

As duas circunferências $x^2+y^2=(R+\rho)^2$ e $x^2+y^2=(R-\rho)^2$ que constituem o seu bordo são percorridas em sentidos opostos: a de raio maior é percorrida no sentido directo, e a de raio menor é percorrida no sentido dos ponteiros do relógio, quando observadas de um ponto no semi-eixo positivo do eixo dos z's. De acordo com o Teorema de Stokes

$$\iint_M \operatorname{rot} f \cdot n\, dS = \int_{\partial M} f \cdot d\alpha = 2\pi((R+\rho)^2-(R-\rho)^2) = 8\pi\rho R.$$

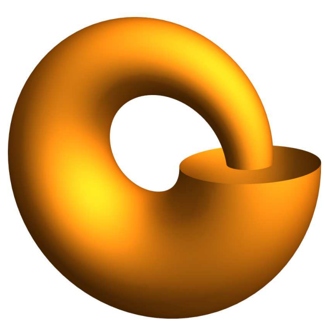
Se considerarmos uma superfície $\tilde{M}$ como a da figura



temos

$$\iint_{\tilde{M}} \operatorname{rot} f \cdot n\, dS = \pm \iint_M \operatorname{rot} f \cdot n\, dS,$$

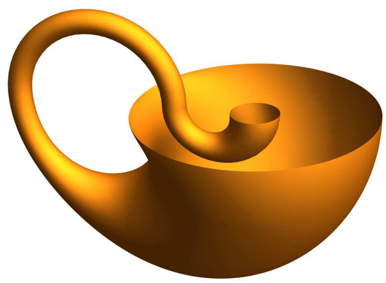
consoante a orientação que for definida para $\tilde{M}$. O mesmo acontece para $\tilde{M}$ como na figura



porque se deformarmos a superfície anterior nesta, a circunferência interior foi rodada 360º.

Para que o fluxo do rotacional mude, é necessário que a superfície se apoie nas circunferências que constituem o bordo de M de modo a que estas sejam descritas no mesmo sentido (quando vistas de um ponto no semi-eixo positivo do eixo dos z's). Para isso precisamos de inverter o sentido de circulação (digamos) na circunferência interior. Podemos consegui-lo rodando a circunferência interior 180º.

Consideremos N como na figura



Então

$$\iint_N \operatorname{rot} f \cdot n \, dS = \pm 2\pi((R+\rho)^2 + (R-\rho)^2) = \pm 4\pi(R^2+\rho^2) \neq \pm 8\pi\rho R,$$

porque $\rho < R$.