# Cálculo Diferencial e Integral III

1º Mini-Teste - 2 de Novembro de 2021

LEAer

Duração: 45 minutos

**Apresente os cálculos**

**1.** Determine a solução de $e^{2y}y' = \frac{1}{t^2}$ que satisfaz $y(-1) = 0$. (6)
*Resposta:* $y = \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{2}{t} - 1\right)$.

**2.** Determine um factor integrante da forma $\mu = \mu(x+2y)$ para a equação (6)

$$\left(e^{-x-2y} + 2e^{-7y}\right) + \left(2e^{-x-2y} - 3e^{-7y}\right)y' = 0.$$

Determine a solução que satisfaz $y\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{1}{7}$, deixando-a na forma implícita.
*Resposta:* $\mu = e^{2x+4y}$, $e^{x+2y} + e^{2x-3y} = 2e$.

**3.** Considere a equação diferencial $y' = y + \frac{1}{t(t+1)}$ com condição inicial $y(1) = 0$. Considerando $y_0(t) \equiv 0$, determine a iterada de Picard $y_1$ e escreva uma expressão integral para $y_2$. (6)
*Resposta:* $y_1(t) = \ln t - \ln(t+1) + \ln 2$, $y_2(t) = \int_1^t (\ln s - \ln(s+1) + \ln 2)\, ds + \ln t - \ln(t+1) + \ln 2$.

**4.** Seja $y$ contínua em $]a,b[$ e satisfazendo $y' = f(t,y)$ nesse intervalo aberto. Suponha que $f$ é contínua e que $y$ é prolongável por continuidade ao ponto $b$. Designe-se por $z$ o prolongamento por continuidade de $y$ ao ponto $b$. Prove que $z$ é diferenciável à esquerda no ponto $b$ e que $z'(b) = f(b, z(b))$. (2)
*Resposta:* Fixe-se $t_0 \in ]a,b[$. Para $t \in ]a,b[$, tem-se

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, z(s))\, ds \qquad (\star).$$

Fazendo $t \nearrow b$, obtém-se $z(b) = z(t_0) + \int_{t_0}^{b} f(s,z(s))\, ds$, pelo que $(\star)$ é válida para $t \in ]a,b]$. Uma vez que $s \mapsto f(s,z(s))$ é contínua, o Teorema Fundamental do Cálculo garante que $z$ é diferenciável à esquerda em $b$ e $z'(b) = f(b, z(b))$.
*Alternativamente:* Pelo Teorema do Valor Médio, para cada $t \in ]a,b[$, existe um $\alpha_t \in ]t,b[$ tal que

$$\frac{z(b) - z(t)}{b - t} = z'(\alpha_t) = y'(\alpha_t) = f(\alpha_t, y(\alpha_t)).$$

Tomando o limite de ambos os membros quando $t \nearrow b$, e atendendo a que $\alpha_t \to b$, $y(\alpha_t) \to z(b)$ e $f$ é contínua, tem-se

$$z'(b) = \lim_{t \to b} \frac{z(b) - z(t)}{b - t} = f(b, z(b)).$$

# Cálculo Diferencial e Integral III

1º Mini-Teste - 2 de Novembro de 2021

LEAer

Duração: 45 minutos

**Apresente os cálculos**

**1.** Determine a solução de $\frac{1}{y^2}y' = e^{2t}$ que satisfaz $y(0) = 1$. (6)

*Resposta:* $y = \frac{2}{3-e^{2t}}$.

**2.** Determine um factor integrante da forma $\mu = \mu(x + 2y)$ para a equação (6)

$$\left(e^{2x+4y} + 2e^{3x-y}\right) + \left(2e^{2x+4y} - 3e^{3x-y}\right) y' = 0.$$

Determine a solução que satisfaz $y\left(\frac{10}{7}\right) = \frac{2}{7}$, deixando-a na forma implícita.

*Resposta:* $\mu = e^{-x-2y}$, $e^{x+2y} + e^{2x-3y} = 2e^2$.

**3.** Considere a equação diferencial $y' = -y + \frac{1}{t(t-1)}$ com condição inicial $y(2) = 0$. Considerando $y_0(t) \equiv 0$, determine a iterada de Picard $y_1$ e escreva uma expressão integral para $y_2$. (6)

*Resposta:* $y_1(t) = \ln(t-1) - \ln t + \ln 2$, $y_2(t) = -\int_2^t (\ln(s-1) - \ln s + \ln 2)\, ds + \ln(t-1) - \ln t + \ln 2$.

**4.** Seja $y$ contínua em $]a, b[$ e satisfazendo $y' = f(t, y)$ nesse intervalo aberto. Suponha que $f$ é contínua e que $y$ é prolongável por continuidade ao ponto $b$. Designe-se por $z$ o prolongamento por continuidade de $y$ ao ponto $b$. Prove que $z$ é diferenciável à esquerda no ponto $b$ e que $z'(b) = f(b, z(b))$. (2)

*Resposta:* Fixe-se $t_0 \in ]a, b[$. Para $t \in ]a, b[$, tem-se

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, z(s))\, ds \qquad (\star).$$

Fazendo $t \nearrow b$, obtém-se $z(b) = z(t_0) + \int_{t_0}^{b} f(s, z(s))\, ds$, pelo que $(\star)$ é válida para $t \in ]a, b]$. Uma vez que $s \mapsto f(s, z(s))$ é contínua, o Teorema Fundamental do Cálculo garante que $z$ é diferenciável à esquerda em $b$ e $z'(b) = f(b, z(b))$.

*Alternativamente:* Pelo Teorema do Valor Médio, para cada $t \in ]a, b[$, existe um $\alpha_t \in ]t, b[$ tal que

$$\frac{z(b) - z(t)}{b - t} = z'(\alpha_t) = y'(\alpha_t) = f(\alpha_t, y(\alpha_t)).$$

Tomando o limite de ambos os membros quando $t \nearrow b$, e atendendo a que $\alpha_t \to b$, $y(\alpha_t) \to z(b)$ e $f$ é contínua, tem-se

$$z'(b) = \lim_{t \to b} \frac{z(b) - z(t)}{b - t} = f(b, z(b)).$$

# Cálculo Diferencial e Integral III

1º Mini-Teste - 5 de Novembro de 2021

LEAer

Duração: 45 minutos

**Apresente os cálculos**

**1.** Determine a solução de $y' - \frac{1}{t}y = \frac{1}{t^2}$ que satisfaz $y\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. (6)
*Resposta:* $y = -\frac{1}{2t} + 4t$.

**2.** Determine a solução de (6)

$$\left(1 + \frac{2t}{t^2 + y^2}\right) + \frac{2y}{t^2 + y^2}y' = 0$$

que satisfaz $y(0) = e$. Pode deixar a solução na forma implícita.
*Resposta:* $t + \ln(t^2 + y^2) = 2$.

**3.** Considere a equação diferencial $y' = \frac{y}{t}$ com condição inicial $y(1) = 2$. (6)
Considerando $y_0(t) \equiv 2$, determine as iteradas de Picard $y_1$ e $y_2$.
*Resposta:* $y_1(t) = 2 + 2\ln t$, $y_2(t) = 2 + 2\ln t + \ln^2 t$.

**4.** Suponha que ao resolver uma equação diferencial obtém (2)

$$3y^5 - 10ty^3 + 15t^2y = 8. \qquad (\star)$$

Determine os $(t_0, y_0)$ tais que não é possível aplicar o Teorema da Função Implícita para garantir que existe uma vizinhança de $(t_0, y_0)$ em que $(\star)$ define $y$ como função de $t$.
*Resposta:* $y^4 - 2ty^2 + t^2 = (y^2 - t)^2 = 0$ e $(\star)$ implica $(t, y) = (1, 1)$.

# Cálculo Diferencial e Integral III

1º Mini-Teste - 5 de Novembro de 2021

LEAer

Duração: 45 minutos

**Apresente os cálculos**

**1.** Determine a solução de $y' + y \sin t = \sin t$ que satisfaz $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. (6)

*Resposta:* $y = 1 + e^{\cos t}$.

**2.** Determine a solução de (6)

$$\frac{1}{t+y^2} + \left(\frac{2y}{t+y^2} + 3y^2\right) y' = 0$$

que satisfaz $y(e) = 0$. Pode deixar a solução na forma implícita.

*Resposta:* $\ln(t + y^2) + y^3 = 1$.

**3.** Considere a equação diferencial $y' = te^t y$ com condição inicial $y(0) = 1$. (6)
Considerando $y_0(t) \equiv 1$, determine a iterada de Picard $y_1$ e escreva uma expressão integral para $y_2$.

*Resposta:* $y_1(t) = 2 + te^t - e^t$, $y_2(t) = 1 + \int_0^t se^s(2 + se^s - e^s)\, ds$.

**4.** Suponha que ao resolver uma equação diferencial obtém (2)

$$12y^5 - 20ty^3 + 15t^2 y = 32. \qquad (\star)$$

Determine os $(t_0, y_0)$ tais que não é possível aplicar o Teorema da Função Implícita para garantir que existe uma vizinhança de $(t_0, y_0)$ em que $(\star)$ define $y$ como função de $t$.

*Resposta:* $4y^4 - 4ty^2 + t^2 = (2y^2 - t)^2 = 0$ e $(\star)$ implica $(t, y) = (2, 1)$.