Cálculo Diferencial e Integral III

$1^{\underline{o}}$ Semestre de 2023/24

LEAer

Exercícios

I Esboço de campos de direcções

1. Esboce os campos de direcções e os gráficos das soluções das seguintes equações diferenciais:

   a) $y' = y(y^2 - 1)$,

   b) $y' = y^2 + 1$,

   c) $y' = \cos(y - t)$,

   d) $y' = -ty$,

   e) $y' = \frac{y+t}{y-t}$,

   f) $y' = -\frac{4y-6t}{y-3t}$.

2. Determine as curvas ortogonais às soluções de $y' = y$ e esboce-as. Resposta: $\frac{y^2}{2} = -t + c$.

3. Considere $y' = \sqrt{1 - y^2}$. Esboce o campo de direcções e os gráficos das soluções. Determine se as rectas $y = -1$ e $y = 1$ são assímptotas dos gráficos das soluções ou se as soluções não constantes atingem os valores -1 e 1. Discuta o problema da unicidade de solução. Resposta: $y = \sin(t + c)$ para $t \in \left[-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c\right]$. As soluções com condição inicial $y(t_0) = -1$ ou com condição inicial $y(t_0) = 1$ não são únicas.

4. Esboce o campo de direcções de $y' = 2\sqrt{y}$. Determine todas as soluções com $y(0) = 0$. Resposta: Seja $c \in [0, +\infty]$. Então

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq c, \\ (t - c)^2 & \text{se } t \geq c, \end{cases}$$

   é solução do problema.

5. Esboce o campo de direcções e os gráficos das soluções da equação diferencial

$$y' = \sin y.$$

   Determine as curvas ortogonais aos gráficos das soluções. Resposta: $\cos y = t + c$.

II Edo's escalares de primeira ordem

1. Determine a solução da equação diferencial que satisfaz a condição inicial $y(x_0) = y_0$.

   a) $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$. Resposta: $y = y_0 e^{x^2 - x_0^2} + e^{x^2}(x^2 - x_0^2)$.

   b) $y' - \tan(x)y = \sin x$, com $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k inteiro). Resposta: $y \cos x = y_0 \cos x_0 + \frac{1}{2}(\sin^2 x - \sin^2 x_0)$.

   c) $y' = e^{x+y}$. Solução: $y = -\ln(e^{-y_0} - e^x + e^{x_0})$.

   d) $xyy' + 1 + y^2 = 0$, com $x_0 y_0 \neq 0$. Resposta: $y^2 = (1 + y_0^2)\frac{x_0^2}{x^2} - 1$.

   e) $(2x^3 + xy^2) + (x^2 y + 2y^3)y' = 0$, com $y_0 \neq 0$. Resposta: $x^4 + x^2 y^2 + y^4 = x_0^4 + x_0^2 y_0^2 + y_0^4$.

   f) $\frac{y^2}{2} + 2ye^x + (y + e^x)y' = 0$, com $y_0 \neq -e^{-x_0}$. Resposta: o factor integrante é e^x e a solução $\frac{y^2}{2}e^x + ye^{2x} = \frac{y_0^2}{2}e^{x_0} + y_0 e^{2x_0}$.

2. Determine a solução geral de $y' = y\ln(y)$ e determine a solução que satisfaz $y(0) = \pi$. Resposta: $y(t) = e^{ce^t}$, $y(t) = \pi^{e^t}$.

3. Determine a solução geral de $y' = \frac{t}{t^2+1}y$. Resposta: $y(t) = c\sqrt{t^2 + 1}$.

4. Determine a solução de
$$\frac{1}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = x \ln x$$
que satisfaz $y(e) = e^2$. Resposta: $y(x) = x^2(x \ln x - x + 1)$.

5. Determine a solução de
$$(t^2 - 1)y' + 2y = (t + 1)^2 \text{ para } t \in] - 1, 1[,$$
que satisfaz $y(0) = 1$. Verifique a sua resposta.

6. Considere a equação diferencial ordinária de primeira ordem
$$2t + y - yy' = 0.$$
Verifique que $y - 2t$ é factor integrante. Resolva a equação diferencial. Resposta: $y^2 t - \frac{4}{3}t^3 - \frac{1}{3}y^3 = c$.

7. Considere a equação diferencial
$$(8x - y + 6) - 3(x + 1)y' = 0.$$
Determine um factor integrante da forma $\mu = \mu(2x - y)$. Resolva a equação. Não precisa de apresentar as soluções na forma explícita. Sugestão: Para determinar o

potencial ϕ, primitive ambos os membros da equação para ϕ_y e substitua o resultado na equação para ϕ_x.
Resposta: $\mu(s) = s^2 = (2x-y)^2$ é factor integrante da equação dada. As soluções satisfazem

$$\phi = (2x-y)^3(x+1) = \text{constante}.$$

8. Considere a equação diferencial

$$\left(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3\right) + \left(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

   a) Mostre que tem um factor integrante do tipo $\mu = \mu(xy)$.
   b) Mostre que a solução com condição inicial $y(-1) = 1$ é dada implicitamente pela expressão $x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 = 1$.

9. Considere a equação $y' = \frac{t^2-y^2}{2ty}$, com $y_0t_0 \neq 0$. Seja $v = \frac{y}{t}$. Verifique que $\frac{t^2-y^2}{2ty} = \frac{1-v^2}{2v}$ e que $y' = tv' + v$. Determine v e seguidamente y.

   Resposta: $1 - 3v^2 = \frac{c}{t^3}$ e $t^3 - 3ty^2 = c$ $(c = t_0^3 - 3t_0y_0^2)$.

10. Considere a equação diferencial

$$\dot{y} = f(at + by + c)$$

   em que a, b, c são constantes reais e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

   a) Mostre que a substituição $v = at + by + c$, transforma a equação numa equação separável. Resposta: $\dot{v} = bf(v) + a$.
   b) Resolva o problema de valor inicial

$$\dot{y} = e^{2t+y-1} - 2 \quad , \quad y(0) = 1.$$

   Resposta: $y(t) = 1 - 2t - \ln(1-t)$.

11. Considere a equação diferencial

$$y + (4y^2 + 2x)\frac{dy}{dx} = 0.$$

   a) Mostre que esta equação tem um factor integrante $\mu = \mu(y)$.
      Resposta: $\mu(y) = y$.
   b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial $y(1) = 1$.
      Resposta: $y(x) = \sqrt{\frac{-x+\sqrt{x^2+8}}{2}}$.

12. Sejam $f, g, k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfazendo as hipóteses do Teorema de Picard-Lindelöf. Recorde que se existe um t_0 tal que $f(t,y) \leq g(t,y)$ para todo o (t,y) com $t \geq t_0$,

$$\begin{aligned} y' &= f(t,y), \\ z' &= g(t,z), \end{aligned}$$

$y(t_0) \leq z(t_0)$, então $y(t) \leq z(t)$ para todo o $t \geq t_0$. Se $k(t,y) \leq g(t,y)$ para todo o (t,y) com $t \leq t_0$,

$$w' = k(t,w),$$

$z(t_0) \leq w(t_0)$, então $z(t) \leq w(t)$ para todo o $t \leq t_0$.

Usando este resultado, prove que

a) As soluções de $y' = \sin(t^2 + y^2)$ estão definidas em $\mathbb{R}$.
b) As soluções de $y' = y^2 + 2 + \sin(t^2 + y^2)$ estão definidas num intervalo limitado.

13. Calcule as duas primeiras iteradas de Picard para $y' = t^2 + y^2$ com $y(0) = 0$.
Resposta:

$$\begin{aligned} y_0(t) &= 0, \\ y_1(t) &= \frac{t^3}{3}, \\ y_2(t) &= \frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63}. \end{aligned}$$

14. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = \tan y, \\ y(0) = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Tomando como iterada de Picard de ordem zero $y_0(t) \equiv \frac{\pi}{4}$, calcule $y_1(t)$ e $y_2(t)$. Qual o domínio de y_2?
Resposta:

$$\begin{aligned} y_0(t) &= \frac{\pi}{4}, \\ y_1(t) &= \frac{\pi}{4} + t, \\ y_2(t) &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \ln\Big[\cos\Big(\frac{\pi}{4} + t\Big)\Big], \quad \text{para } -\frac{3\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

III Sistemas de edo's lineares de primeira ordem com coeficientes constantes

1. Calcule a solução de $X' = AX$, com $X(0) = X_0$, e esboce o retrato de fase dos sistemas:

   a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. Resposta: $X(t) = \begin{bmatrix} \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} & \frac{e^{3t}-e^{-t}}{4} \\ e^{3t} - e^{-t} & \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} \end{bmatrix} X_0$.

   b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$. Resposta: $X(t) = \begin{bmatrix} \frac{4-e^{-3t}}{3} & \frac{4e^{-3t}-4}{3} \\ \frac{1-e^{-3t}}{3} & \frac{4e^{-3t}-1}{3} \end{bmatrix} X_0$.

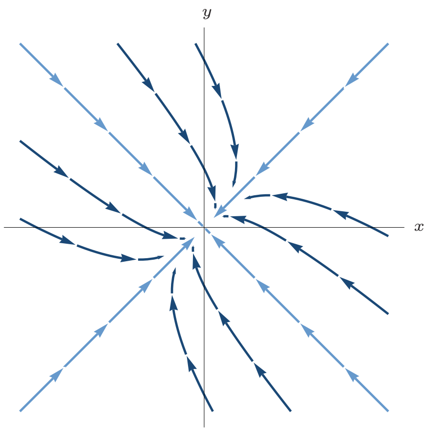
2. Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{1}$$

   a) Determine a solução que vale $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ em $t = 0$.
   Resposta:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{x_0 + y_0}{2} e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{x_0 - y_0}{2} e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

   b) Esboce o retrato de fase do sistema, tendo o cuidado de identificar o comportamento assimptótico das soluções quando t tende para $+\infty$.
   Resposta:



3. Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{2}$$

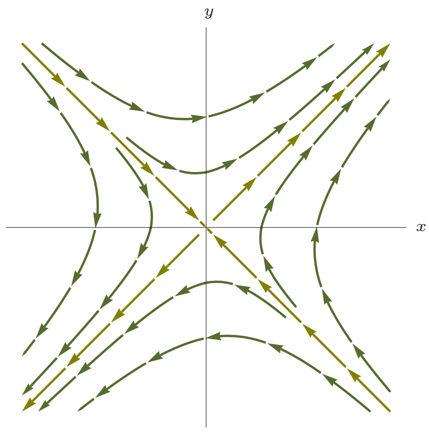
a) Determine a solução que vale $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ em $t = 0$.

Resposta:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{x_0 - y_0}{2} e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{x_0 + y_0}{2} e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) Esboce o retrato de fase do sistema.

Resposta:



4. Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{3}$$

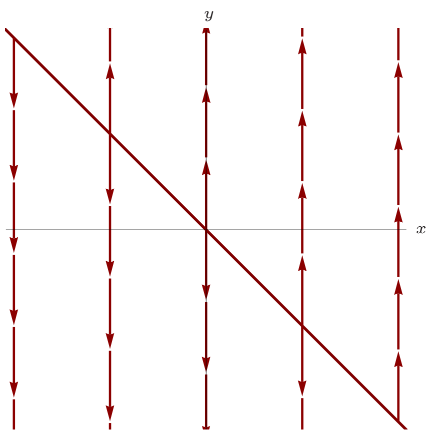
a) Determine a solução que vale $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ em $t = 0$.

Resposta:

$$X(t) \;=\; x_0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (x_0 + y_0) e^{t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) Esboce o retrato de fase do sistema.

Resposta:



5. Para cada uma das seguintes matrizes determine e^{At}:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$. Resposta: $e^{At} = \begin{bmatrix} \cos(4t) & \sin(4t) \\ -\sin(4t) & \cos(4t) \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Resposta: $e^{At} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{4t} - e^{2t} & -3e^{4t} + 3e^{2t} \\ e^{4t} - e^{2t} & -e^{4t} + 3e^{2t} \end{bmatrix}$.

c) $A = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$. Resposta: $e^{At} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 - 6t & 12t \\ -3t & 1 + 6t \end{bmatrix}$.

d) $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Resposta: $e^{At} = e^{3t} \begin{bmatrix} \cos(2t) + \sin(2t) & -2\sin(2t) \\ \sin(2t) & \cos(2t) - \sin(2t) \end{bmatrix}$.

6. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mostre que

$$e^{At} = e^t \begin{bmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{bmatrix}.$$

7. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Calcule e^{At}. Resposta: $e^{At} = e^t \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$.

b) Calcule a solução de $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, com $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$.

Resposta: $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{bmatrix}$.

c) Em termos de coordenadas polares, $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, verifique que o sistema da alínea **b)** pode ser escrito $r' = r$ e $\theta' = 1$, ou seja, $\frac{dr}{d\theta} = r$. Resolva para r em função de θ.

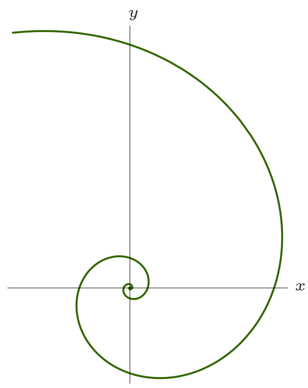
Resposta: Substituindo $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$ no sistema obtém-se

$$\begin{cases} r'\cos\theta - r\sin\theta\,\theta' = r\cos\theta - r\sin\theta, \\ r'\sin\theta - r\cos\theta\,\theta' = r\cos\theta + r\sin\theta. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação do sistema por $\cos\theta$, a segunda equação por $\sin\theta$, e adicionando os resultados, vem $r' = r$. Finalmente,substituindo r' por r numa das equações do sistema, conclui-se que $\theta' = 1$. Logo,

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr/dt}{d\theta/dt} = \frac{r}{1} = r.$$

De $\frac{dr}{d\theta} = r$ tira-se $r = r_0 e^{\theta - \theta_0}$.



IV Edo's lineares escalares de ordem superior a um

1. Determine as soluções de

   a) $y'' - y = 0$. Resposta: $y = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$;

   b) $y'' - 3y' - 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Resposta: $y = \frac{1}{5}e^{4t} + \frac{4}{5}e^{-t}$;

   c) $y'' + y = 0$. Resposta: $y = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$;

   d) $y'' - 2y' + 5y = 0$. Resposta: $y = e^t(c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t))$;

   e) $y'' + 2y' + y = 0$. Resposta: $y = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$.

2. Determine as soluções de

   a) $y'' - 5y' + 6y = e^t$. Resposta: $y = \frac{1}{2}e^t + c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$;

   b) $y'' - 5y' + 6y = e^{2t}$. Resposta: $y = -te^{2t} + c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$;

   c) $y'' - 5y' + 6y = t + te^t + 1$.
   Resposta: $y = \frac{11}{36} + \frac{t}{6} + \frac{1}{4}(3 + 2t)e^t + c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$ e o aniquilador do 2º membro é $D^2(D-1)^2$;

   d) $y'' - 5y' + 6y = \sin(t)$.
   Resposta: $y = \frac{\sin t + \cos t}{10} + c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$ e o aniquilador do 2º membro é $D^2 + 1$.

3. Quais são os aniquiladores de

   (a) $\sin^2(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$.
   Resposta: $D(D^2 + 4)$;

   (b) $\sin t + te^{2t}$.
   Resposta: $(D^2 + 1)(D - 2)^2$;

   (c) $te^{2t}\sin(3t)$. Resposta: $((D-2)^2 + 9)^2$.

4. Procurando soluções da forma $y = t^\lambda$, determine a solução geral de

   a) $2t^2y'' + 3ty' - y = 0$. Resposta: $y = c_1\sqrt{t} + \frac{c_2}{t}$.

   b) $t^2y'' + 3ty' + 5y = 0$. Resposta: $y = \frac{1}{t}\left(c_1 \cos(2\ln t) + c_2 \sin(2\ln t)\right)$.

5. Determine uma solução da forma $y = t^\lambda$ da equação diferencial. Determine uma solução independente dessa usando o método da redução de ordem. Qual é a solução geral da equação?

   a) $t^2y'' + 3ty' + y = 0$. Resposta: $y = \frac{1}{t}(c_1 + c_2 \ln t)$.

b) $t^2y'' - 3ty' + 4y = 0$. Resposta: $y = t^2\,(c_1 + c_2 \ln t)$.

6. Determine o Wronskiano de duas soluções independentes da equação diferencial $y'' + \omega^2 y = 0$, onde $\omega > 0$.

7. Considere
$$y'' - \frac{1}{t}y' + \frac{1-t}{t}y = 0.$$
Verifique que $y = e^t$ é uma solução da equação. Determine o Wronskiano, $W(t)$, de duas soluções sabendo que $W(1) = 1$. Determine a solução geral da equação diferencial.
Resposta: $W(t) = t$, $y(t) = c_1e^t + c_2e^{-t}(1 + 2t)$.

V Séries de Fourier, equação do calor, equação das ondas, equação de Laplace

1. Determine a série de Fourier da função f no intervalo especificado:

   a) $f(x) = x; \quad |x| \leq 1$.
   Resposta: $f(x) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(\pi x)}{1} - \frac{\sin(2\pi x)}{2} + \frac{\sin(3\pi x)}{3} - \dots\right)$.

   b) $f(x) = x^2; \quad |x| \leq \pi$.
   Resposta: primitivando por partes, obtém-se

   $$\int x^2 \cos(nx)\, dx = \frac{x^2}{n}\sin(nx) + \frac{2}{n^2}x\cos(nx) - \frac{2}{n^3}\sin(nx).$$

   Isto conduz a

   $$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\frac{\cos(x)}{1^2} - \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} - \dots\right].$$

   c)

   $$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -\pi < x < 0, \\ 1 & \text{se } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

   Resposta: $f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots\right)$.

2. Seja $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, definida por $g(s) = \sin s$. Determine a expansão de g em série de cosenos. Nota: $2\sin s\cos(ns) = \sin((n+1)s) - \sin((n-1)s)$.
   Resposta:

   $$\sin s = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2-1}\cos(2s) - \frac{1}{4^2-1}\cos(4s) - \frac{1}{6^2-1}\cos(6s) + \dots\right].$$

3. Determine os valores próprios e as funções próprias do operador $-D^2$ definido no espaço $\{y \in C^2[0, l] : y'(0) = 0 \text{ e } y'(l) = 0\}$.

   Resposta: Os valores próprios são $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$, com $n \in \mathbb{N}_0$, as funções próprias próprias correspondentes são $y_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right)$, com $a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

4. Determine a solução de

   $$\begin{cases} u_t = 9u_{xx} \quad \text{para } (x,t) \in [0,1] \times [0, +\infty[, \\ u_x(0,t) = 0, \; u_x(1,t) = 0 \quad \text{para } t \in [0, +\infty[, \\ u(x,0) = 3\cos(2\pi x) - 5\cos(4\pi x) \quad \text{para } x \in [0,1]. \end{cases}$$

   Resposta: $u(x,t) = 3e^{-9\cdot 2^2\cdot\pi^2 t}\cos(2\pi x) - 5e^{-9\cdot 4^2\cdot\pi^2 t}\cos(4\pi x)$.

5. Determine a solução de

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{para } (x,y) \in [0,a] \times [0,b], \\ u(0,y) = 0 & \text{para } y \in [0,b], \\ u(a,y) = 0 & \text{para } y \in [0,b], \\ u(x,0) = 0 & \text{para } x \in [0,a], \\ u(x,b) = f(x) & \text{para } x \in [0,a]. \end{cases}$$

Resposta:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sinh\Big(\frac{n\pi y}{a}\Big) \sin\Big(\frac{n\pi x}{a}\Big),$$

com

$$d_n = \frac{1}{\sinh\big(\frac{n\pi b}{a}\big)} \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin\Big(\frac{n\pi x}{a}\Big)\, dx.$$

6. Resolva o problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t} \sin x & \text{para } (x,t) \in [0,\pi] \times [0,+\infty[, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{para } t \in [0,+\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{para } x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Resposta:

$$u(x,t) = (c_1 e^{-t} + t e^{-t}) \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \sin(nx).$$

com

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) \sin(nx)\, dx.$$

7. Determine a solução de

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u \quad \text{para } (x,t) \in [0,10] \times [0,+\infty[, \\ u(0,t) = u(10,t) = 0 \quad \text{para } t \in [0,+\infty[, \\ u(x,0) = 3\sin(2\pi x) - 7\sin(4\pi x) \quad \text{para } x \in [0,10]. \end{cases}$$

Resposta: $u(x,t) = 3\sin(2\pi x) e^{(1-4\pi^2)t} - 7\sin(4\pi x) e^{(1-16\pi^2)t}$.

8. Determine a solução de

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{para } (x,t) \in [0,\ell] \times [0,+\infty[, \\ u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0 \quad \text{para } t \in [0,+\infty[, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x) \quad \text{para } x \in [0,\ell]. \end{cases}$$

no caso

a) $f(x) = \cos\left(\frac{4\pi x}{\ell}\right)$ e $g(x) = \cos\left(\frac{6\pi x}{\ell}\right)$.

Resposta: $u(x,t) = \cos\left(\frac{4\pi ct}{\ell}\right)\cos\left(\frac{4\pi x}{\ell}\right) + \frac{\ell}{6\pi c}\sin\left(\frac{6\pi ct}{\ell}\right)\cos\left(\frac{6\pi x}{\ell}\right)$.

b) $f \in C^3$, $g \in C^2$, $f'(0) = g'(0) = f'(\ell) = g'(\ell) = 0$.

9. Determine a solução de

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{se } 0 < x < a \text{ e } 0 < y < b, \\ u_y(x,0) = 0 & \text{se } 0 < x < a, \\ u_y(x,b) = f(x) & \text{se } 0 < x < a, \\ u_x(0,y) = 0 & \text{se } 0 < y < b, \\ u_x(a,y) = 0 & \text{se } 0 < y < b, \end{cases}$$

onde a função f satisfaz $\int_0^a f(x)\,dx = 0$.

VI Integrais de Superfície, Teorema da Divergência, Teorema de Stokes

Exercícios com respostas em
https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~gpires/CII/CII-s2-20-21.html#prop. Se o link não funcionar, por favor apague o tilde e volte a escrevê-lo.
Mais exercícios da página do professor Gabriel Pires:

1. Calcule a área da superfície $S = \{(x,y,z) \in R^3 : z = x^2 + y^2,\ x > 0,\ y > 0,\ z < 1\}$.
   Resposta: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sqrt{1+4r^2} r\, dr d\theta = \frac{\pi}{24}(5\sqrt{5} - 1)$.

2. Calcule o momento de inércia, relativo ao eixo dos y's, da superfície $S = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + z^2 = 1 + y^2,\ 0 < y < 3\}$, cuja densidade de massa é a função $\sigma(x,y,z) = \frac{y}{\sqrt{1+2y^2}}$.
   Resposta: $\int_0^{2\pi} \int_0^3 (1+y^2) \frac{y}{\sqrt{1+2y^2}} \sqrt{1+2y^2}\, dy d\theta = \frac{99\pi}{2}$.

3. Calcule o trabalho realizado pelo campo vectorial $G(x,y) = (\sin(x^2), \cos(y^2) + x)$ ao longo da elipse dada pela equação $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ e percorrida no sentido horário.
   Resposta: $\int\int 1\, dx dy = 2\pi$.

4. Calcule o fluxo do campo vectorial $F(x,y,z) = (-y, x, z)$ através da superfície dada por $S = \{(x,y,z) \in R^3 : z = x^2 + y^2,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$, segundo a normal com terceira componente positiva.
   Resposta: $\int_0^1 \int_0^1 (-y, x, x^2 + y^2) \cdot (-2x, -2y, 1)\, dx dy = \frac{2}{3}$.

5. Considere a superfície $S = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + z^2 = 1 + y^2,\ 0 < y < 3\}$ orientada com a normal ν tal que $\nu_y < 0$.

   a) Calcule o fluxo do campo vectorial $F(x,y,z) = (-x, y, z)$ através de S no sentido da normal ν, usando o teorema de Gauss.
   Resposta: Volume $= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{\sqrt{1+y^2}} \rho\, d\rho dy d\theta = 12\pi$, $\int\int_{\{y=0,\ x^2+z^2 \leq 1\}} F \cdot n\, dS = 0$, $\int\int_{\{y=3,\ x^2+z^2 \leq 10\}} F \cdot n\, dS = 30\pi$, $\int\int_S F \cdot n\, dS = 12\pi - 30\pi = -18\pi$.

   b) Calcule o fluxo do campo vectorial $G(x,y,z) = (zy, x, xy)$ através de S no sentido da normal ν, usando o teorema de Stokes.
   Resposta: $A = \left(xz, -\frac{yz^2}{2} + \frac{x^2 y}{2}, 0\right)$, $\nabla \times A = G$. $\alpha_1(\theta) = (3\cos\theta, 0, -3\sin\theta)$ com $\theta \in (0, 2\pi)$, e $\alpha_2(\theta) = (\cos\theta, 0, \sin\theta)$ com $\theta \in (0, 2\pi)$. $\int_A \cdot d\alpha_1 + \int_A \cdot d\alpha_2 = 0$.

6. Calcule o fluxo do rotacional do campo $F(x,y,z) = (x, -xz, yz)$ através da superfície $S = \{(x,y,z) \in R^3 : 0 < z = 1 - x^2 - y^2\}$ segundo a normal com terceira componente positiva.
   Resposta: $\alpha(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ com $\theta \in (0, 2\pi)$, $F(x,y,0) = (x, 0, 0)$. $\int F \cdot d\alpha = 0$.

7. Calcule o trabalho do campo vectorial

$$F(x,y,z) = \left(x, \frac{z}{y^2+z^2} + y, -\frac{y}{y^2+z^2} + z\right)$$

ao longo das linhas seguintes, segundo sentidos à sua escolha:

a) $\{(x,y,z) \in R^3 : z = 0,\ x^2 + (y-2)^2 = 1\}$. Resposta: 0.

b) $\{(x,y,z) \in R^3 : x = 1,\ |y| + |z| = 2\}$. Resposta: -2π.

Referências

[1] **M. Braun**. Differential Equations and their Applications, An Introduction to Applied Mathematics, 4th ed., Springer, 1993.

[2] **P.M. Girão**. Introdução à Análise Complexa, Séries de Fourier e Equações Diferenciais, IST Press, 2014.

[3] **L.T. Magalhães**. Análise Complexa em Uma Variável e Aplicações, IST, Fevereiro de 2004.

[4] **L.T. Magalhães**. Teoria Elementar de Equações Diferenciais, IST, Junho de 2005.

[5] **L.V. Pessoa**. Introdução à Análise Complexa, IST, Maio de 2008.

[6] **G. Pires**. Cálculo Diferencial e Integral em $\mathbb{R}^n$, 4ª ed., IST Press, 2022.