

Cálculo Diferencial e Integral III
Exame de Época Especial - 24 de Julho de 2023
Todos os cursos

Resolução

1.

- a) $\sin x$ é um factor integrante. Multiplicando ambos os membros da equação diferencial por $\sin x$, e reconhecendo no primeiro membro a derivada do factor integrante multiplicado por y , obtém-se

$$\frac{d}{dx}(y \sin x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Primitivando, vem

$$y \sin x = \arctan x + c.$$

Para garantir a condição inicial deve escolher-se $c = -\arctan \frac{\pi}{2}$. A solução é

$$y = \frac{\arctan x - \arctan \frac{\pi}{2}}{\sin x}.$$

- b) A equação é separável:

$$-\frac{y'}{y^4} = e^{2x}x$$

Primitivando ambos os membros em ordem a x , vem

$$\frac{1}{3y^3} = \frac{1}{4}e^{2x}(2x-1) + c$$

Usando a condição inicial, $c = \frac{1}{3}$. Portanto,

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{1 + \frac{3}{4}e^{2x}(2x-1)}}.$$

2.

$$y = \alpha e^{-2t} + \beta e^{2t} + \frac{3t}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

3. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$ e $X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$. Como $A^2 = 0$, tem-se

$$U(t) = \exp(At) = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots = I + At = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha t & 1 \end{bmatrix}.$$

Além disto, tem-se

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \dot{U}X_0 = AU X_0 = AX = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} X, \\ X(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Nota. Houve cursos em que $U(t) = e^{At}$ foi definido como a solução de

$$\begin{aligned} \dot{U} &= AU \\ U(0) &= I. \end{aligned}$$

Nesse caso, fazendo $U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{u}_{11} &= 0 \quad \wedge \quad u_{11}(0) = 1, \\ \dot{u}_{12} &= 0 \quad \wedge \quad u_{12}(0) = 0, \\ \dot{u}_{21} &= \alpha u_{11} \quad \wedge \quad u_{21}(0) = 0, \\ \dot{u}_{22} &= 0 \quad \wedge \quad u_{22}(0) = 1. \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema, obtém-se

$$U(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha t & 1 \end{bmatrix}.$$

4.

a) Seja

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1 - y^2 - z^2\},$$

$D = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 < 1\}$, e $\nu = (-1, 0, 0)$. Usando o Teorema da Divergência,

$$\int_D F \cdot \nu \, dS + \int_S F \cdot n \, dS = \int_R \operatorname{div} F \, dV.$$

Atendendo a que $F(0, y, z) = (1, -y, y)$, tem-se

$$\int_D F \cdot \nu \, dS = - \int_D dS = -\pi.$$

Por outro lado, usando coordenadas cilíndricas,

$$\begin{aligned} \int_R \operatorname{div} F \, dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-\rho^2} x \rho \, dx d\rho d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{(1-\rho^2)^2}{2} \rho \, d\rho = -\pi \frac{(1-\rho^2)^3}{6} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Conclui-se que

$$\int_S F \cdot n \, dS = \frac{7\pi}{6}.$$

- b) De acordo com o Teorema de Stokes, atendendo a que $\text{rot } F(x, y, z) = (1, -2x - z, y \sin x)$ (e portanto, $\text{rot } F(0, y, z) = (1, -z, 0)$), e designando por D o disco $\{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 < 1\}$, tem-se

$$\int_S \text{rot } F \cdot n \, dS = \int_D \text{rot } F \cdot (1, 0, 0) \, dS = \int_D (1, -z, 0) \cdot (1, 0, 0) \, dS = \pi.$$

Resolução alternativa: Com $\alpha : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $\alpha(t) = (0, \cos t, \sin t)$:

$$\begin{aligned} \int_S \text{rot } F \cdot n \, dS &= \int_{\partial S} F \cdot d\alpha = \int_0^{2\pi} F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1, -\cos t, \cos t) \cdot (0, -\sin t, \cos t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin t \cos t + \cos^2 t) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 t \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2t)) \, dt = \pi. \end{aligned}$$

5.

- a) Atendendo às condições fronteira de Neumann, para cada t , prolonga-se u como função par em x e periódica em x , de período 2π . Então, para cada t fixo, desenvolvendo $x \mapsto u(x, t)$ em série de Fourier,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \cos(nx).$$

As condições fronteira estão formalmente satisfeitas. Substituindo na equação diferencial, vem

$$\sum_{n=0}^{\infty} a'_n(t) \cos(nx) = - \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + t) a_n(t) \cos(nx).$$

Usando a unicidade dos coeficientes de Fourier, para todo o n deve ter-se

$$a'_n(t) = -(n^2 + t) a_n(t).$$

A expressão para os a_n 's é

$$a_n(t) = c_n e^{-n^2 t - \frac{t^2}{2}}.$$

Portanto, obtém-se

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-n^2 t - \frac{t^2}{2}} \cos(nx).$$

A equação diferencial está formalmente satisfeita. Resta garantir a condição inicial:

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nx) = 1 - 7 \cos(5x).$$

Logo,

$$c_0 = 1, \quad c_5 = -7,$$

e os outros c_n 's são nulos. A solução do problema é

$$u(x, t) = e^{-\frac{t^2}{2}} - 7e^{-25t - \frac{t^2}{2}} \cos(5x).$$

- b) Como u é uma solução regular do problema, de acordo com a regra de Leibniz, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{\pi} e^{t^2} u_x^2(x, t) dx &= 2 \int_0^{\pi} (e^{t^2} u_x u_{xt} + t e^{t^2} u_x^2) dx \\ &= 2e^{t^2} \left((u_x u_t)(x, t) \Big|_{x=0}^{x=\pi} + \int_0^{\pi} (-u_{xx} u_t + t u_x^2) dx \right) \\ &= 2e^{t^2} \int_0^{\pi} (-u_{xx}^2 + u_{xx} t u + t u_x^2) dx \quad (\text{pq } u_t = u_{xx} - t u) \\ &= 2e^{t^2} \left((u_x t u)(x, t) \Big|_{x=0}^{x=\pi} + \int_0^{\pi} (-u_{xx}^2 - t u_x^2 + t u_x^2) dx \right) \\ &= -2e^{t^2} \int_0^{\pi} u_{xx}^2 dx. \end{aligned}$$