Cálculo Diferencial e Integral III

Exame de Época Especial - 24 de Julho de 2023

Todos os cursos

Duração: 120 minutos

Apresente os cálculos

1. Determine a solução do problema de valor inicial:

a) (2)

$$\frac{dy}{dx} + y\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{(1+x^2)\sin x}, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

b) (2)

$$y' + y^4 e^{2x} x = 0, \qquad y\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

2. Determine a solução geral da equação diferencial (3)

$$y'' - 4y = 3e^{2t} + 1.$$

3. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Usando directamente a definição de exponencial de uma matriz, calcule $U(t) = \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} t\right)$. Se $X(t) = U(t)\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$, escreva um sistema de primeira ordem cuja solução geral é X. (2)

4. Considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por

$$F(x,y,z) = \big(\sin x + 1, -y\cos x, x^2 + xz + y\big),$$

e a superfície

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1 - y^2 - z^2,\ x > 0\right\},$$

munida da normal n com primeira componente positiva.

a) Use o Teorema da Divergência para calcular o fluxo de F através de S na direcção de n. (4)

b) Use o Teorema de Stokes para calcular o fluxo do rotacional de F através de S na direcção de n. (2)

5. Considere o problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - t\,u & \text{para } (x,t) \in [0,\pi] \times [0,\infty[, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & \text{para } t \in [0,\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{para } x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

a) Determine uma solução quando $u_0(x) = 1 - 7\cos(5x)$. (3)

b) Obtenha uma expressão simplificada para (2)

$$\frac{d}{dt}\int_0^\pi e^{t^2}\,u_x^2(x,t)\,dx,$$

em que u é uma solução regular do problema acima, para uma função u_0 genérica (também regular e satisfazendo certas condições, ditas de compatibilidade).