Cálculo Diferencial e Integral III

Exame - 23 de Janeiro de 2023

LMAC

Resolução

1.

$$y = \alpha \cos t + \beta \sin t + t^2 - 1, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2. De acordo com o Teorema de Stokes,

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot n \, dS = \int_{\partial S} F \cdot d\alpha.$$

Cálculo do primeiro membro da igualdade:

$$r(x,y) = (x, y, xy), \quad \text{para } x^2 + y^2 < 4,$$

$$\partial_x r \times \partial_y r = (-(xy)_x, -(xy)_y, 1) = (-y, -x, 1),$$

$$n \, dS = (-y, -x, 1) \, dxdy,$$

$$\operatorname{rot} F = (0, 0, 2),$$

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot n \, dS = \int_{x^2+y^2<4} 2 \, dxdy = 8\pi.$$

Cálculo do segundo membro da igualdade:

$$\alpha(\theta) = (2\cos\theta, 2\sin\theta, 2\sin(2\theta)), \quad \text{para } \theta \in [0, 2\pi],$$

$$\alpha'(\theta) = (-2\sin\theta, 2\cos\theta, 4\cos(2\theta)),$$

$$F(\alpha(\theta)) = (-2\sin\theta, 2\cos\theta, 2\sin(2\theta)),$$

$$F(\alpha(\theta)) \cdot \alpha'(\theta) = 4 + 4\sin(4\theta).$$

$$\int F \cdot d\alpha = \int_0^{2\pi} F(\alpha(\theta)) \cdot \alpha'(\theta) \, d\theta = 8\pi.$$

3. Atendendo às condições fronteira de Neumann, para cada t fixo, prolonguemos $u(\,\cdot\,, t)$ como função par em torno de zero, e periódica de período 4π. Então

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \cos\left(\frac{nx}{2}\right),$$

Substituindo esta expressão para u na equação diferencial obtém-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)'' \cos\left(\frac{nx}{2}\right) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^2n^2}{4}\, a_n \cos\left(\frac{nx}{2}\right) + c^2 \cos x.$$

Usando a unicidade dos coeficientes de Fourier, para todo o n diferente de 2 deve ter-se

$$a_n'' = -\frac{c^2n^2}{4}\, a_n,$$
$$a_2'' = -c^2\, a_2 + c^2,$$

Resolvendo estas equações diferenciais ordinárias, obtém-se

$$a_0(t) = \alpha_0 + \beta_0 t,$$

$$a_2(t) = \alpha_2 \cos(ct) + \frac{\beta_2}{c} \sin(ct) + 1,$$
$$a_n(t) = \alpha_n \cos\left(\frac{cnt}{2}\right) + \frac{2\beta_n}{cn} \sin\left(\frac{cnt}{2}\right)$$

para n diferente de 0 e de 2. Isto conduz a

$$u(x,t) = \alpha_0 + \beta_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n \cos\left(\frac{cnt}{2}\right) + \frac{2\beta_n}{cn} \sin\left(\frac{cnt}{2}\right)\right] \cos\left(\frac{nx}{2}\right) + \cos x.$$

Desta expressão conclui-se que

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{nx}{2}\right) + \cos x, \\ u_t(x,0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \cos\left(\frac{nx}{2}\right). \end{aligned}$$

Finalmente, usando as condições iniciais obtém-se $\alpha_2 = -1$, $\beta_3 = 1$, sendo todos os restantes α_n's e β_n's nulos. Portanto,

$$u(x,t) = \cos x - \cos(ct) \cos x + \frac{2}{3c} \sin\left(\frac{3ct}{2}\right) \cos\left(\frac{3x}{2}\right).$$

4.

a) A função $y = e^t$ satisfaz $y' = y$. Como então $y'' = y'$ e $t - (1+2t) + (1+t) = 0$, tem-se que ce^t (com $c \in \mathbb{R}$) satisfaz a equação.

b) A equação diferencial pode ser escrita na forma

$$y'' - \frac{1+2t}{t}y' + \frac{1+t}{t}y = 0$$

Sabemos que

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}$$

para uma função $p(t)$, que neste caso é $-\frac{1+2t}{t}$. Assim,

$$W(t) = W(1)e^{\int_1^t \frac{1+2s}{s}\,ds} = e^{\ln t + 2(t-1)} = te^{2(t-1)}.$$

c) Escolhendo para $y_1(t) = \frac{e^{-2}}{2}e^t$, y_2 satisfaz a equação linear de primeira ordem

$$y_1y_2' - y_1'y_2 = W \;\Leftrightarrow\; y_2' - y_2 = te^{2(t-1)}/y_1 = 2te^t.$$

O factor integrante desta equação é e^{-t}. Tem-se

$$\frac{d}{dt}(e^{-t}y_2) = 2t.$$

Integrando ambos os membros, vem

$$e^{-t}y_2 = c_1 + t^2 \;\Leftrightarrow\; y_2 = c_1e^t + t^2e^t.$$

Obtivemos assim uma solução de $(\star)$ independente de e^t, a função t^2e^t. A solução geral de $(\star)$ é

$$y = c_1e^t + c_2t^2e^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

5. Atendendo a

$$\int_{2n}^{2n+1} e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}\left(e^{-2ns} - e^{-(2n+1)s}\right),$$

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + e^{-4s} - e^{-5s} + \ldots\right) = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1+e^{-s}},$$

para $s > 0$.

6.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(y-\pi)\,dy + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(y)\,dy + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx \;=\; 0.
\end{aligned}$$

Para $n > 0$, tem-se

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(y-\pi)\cos(ny-n\pi)\,dy + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(y)\cos(ny-n\pi)\,dy + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \\
&= -(-1)^n\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(y)\cos(ny)\,dy + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \\
&= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par,} \\ \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \\
&= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par,} \\ \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusão: $a_{2n} = 0$ e $b_{2n} = 0$, para todo o n natural.
Outro processo.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)]$$

implica

$$\begin{aligned}
-f(x+\pi) &= -\sum_{n=0}^{\infty}[a_n\cos(nx+n\pi) + b_n\sin(nx+n\pi)] \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n a_n\cos(nx) + (-1)^n b_n\sin(nx)].
\end{aligned}$$

Por unicidade dos coeficientes de Fourier, $f(x) = -f(x+\pi)$ implica

$$\begin{aligned}
a_n &= (-1)^{n+1}a_n, \\
b_n &= (-1)^{n+1}b_n,
\end{aligned}$$

para todo o n, ou seja, $a_{2n} = 0$ e $b_{2n} = 0$, para todo o n natural.