

Cálculo Diferencial e Integral III

Exame - 21 de Janeiro de 2026

LEAer

Duração: 120 minutos

Apresente os cálculos

1. Considere a equação diferencial

$$(2t + 6y^2)y' = y.$$

a) Calcule um factor integrante da forma $\mu = \mu(y)$. (3)

b) Determine a solução que satisfaz $y(-1) = 1$. (1)

c) Seja y a solução obtida na alínea anterior. Prove que não existe $T > -1$ tal que $\lim_{t \nearrow T} y(t) = +\infty$. Prove que a solução pode ser prolongada ao intervalo $[-1, +\infty[$. (2)

2. Determine a solução geral de (2)

$$((D - 1)^2 - 1)y = t,$$

onde D é o operador de derivação.

3. Use o Teorema da Divergência para calcular o fluxo do campo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definido por (3)

$$F(x, y, z) = (x, y, -z),$$

através da superfície

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2 \right)^2 + (z - 2)^2 = 1, z > 2 \right\},$$

orientada com a normal com a terceira componente positiva. Apresente todos os cálculos que justificam a sua resposta.

4. Considere o campo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definido por (4)

$$f(x, y, z) = \left(0, x, \frac{x^2 - y^2}{2} \right),$$

e a curva sobre a superfície

$$z = xy$$

cuja projecção no plano $(x, y, 0)$ é a circunferência de raio igual a 1 centrada na origem, percorrida no sentido directo. Usando o Teorema de Stokes, calcule a circulação de f ao longo da curva.

5. Seja $a > 0$. Considere o problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 4 \sin(2y) & \text{para } (x, y) \in [0, a] \times [0, \pi], \\ u(x, 0) = u(x, \pi) = 0 & \text{para } x \in [0, a], \\ u(0, y) = 0, \ u(a, y) = f(y) & \text{para } y \in [0, \pi]. \end{cases}$$

- a) Determine a solução para uma função genérica f . (3)
- b) Determine a solução quando $f(y) = \sin(y)$. (1)
- c) Deduza as condições de compatibilidade deste problema. (1)

Cálculo Diferencial e Integral III

Exame - 21 de Janeiro de 2026

LEAer

Duração: 120 minutos

Apresente os cálculos**1.** Considere a equação diferencial

$$(3t + 9y^3)y' = y.$$

a) Calcule um factor integrante da forma $\mu = \mu(y)$. (3)b) Determine a solução que satisfaz $y(-1) = 1$. (1)c) Seja y a solução obtida na alínea anterior. Prove que não existe $T > -1$ tal que $\lim_{t \nearrow T} y(t) = +\infty$. Prove que a solução pode ser prolongada ao intervalo $[-1, +\infty[$. (2)**2.** Determine a solução geral de (2)

$$((D - 2)^2 - 4)y = e^{4t},$$

onde D é o operador de derivação.**3.** Use o Teorema da Divergência para calcular o fluxo do campo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definido por (3)

$$F(x, y, z) = (-x, y, z),$$

através da superfície

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 3 \right)^2 + (z - 3)^2 = 1, z < 3 \right\},$$

orientada com a normal com a terceira componente negativa. Apresente todos os cálculos que justificam a sua resposta.

4. Considere o campo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definido por (4)

$$f(x, y, z) = (0, x, -xy),$$

e a curva sobre a superfície

$$z = \frac{x^2 - y^2}{2}$$

cujas projecção no plano $(x, y, 0)$ é a circunferência de raio igual a 1 centrada na origem, percorrida no sentido directo. Usando o Teorema de Stokes, calcule a circulação de f ao longo da curva.

5. Seja $a > 0$. Considere o problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 9 \sin(3y) & \text{para } (x, y) \in [0, a] \times [0, \pi], \\ u(x, 0) = u(x, \pi) = 0 & \text{para } x \in [0, a], \\ u(0, y) = 0, \ u(a, y) = f(y) & \text{para } y \in [0, \pi]. \end{cases}$$

- a) Determine a solução para uma função genérica f . (3)
- b) Determine a solução quando $f(y) = \sin(2y)$. (1)
- c) Deduza as condições de compatibilidade deste problema. (1)