

Cálculo Diferencial e Integral III

Exame - 22 de Janeiro de 2025

LEAer

Duração: 120 minutos

Apresente os cálculos

1. Determine explicitamente a solução do problema de valor inicial (3)

$$y' = 1 - y^2, \quad y(0) = 0.$$

2. Determine um factor integrante da forma $\mu(2t - 3y)$ para (4)

$$\left(2 + \frac{4t}{3} + 2y\right) + \left(-3 - 3t - \frac{3y}{2}\right) y' = 0.$$

Não resolva a equação exacta que obtiver.

3. Determine a solução geral de (3)

$$y''' + 9y' = -9 - 10e^t.$$

4. Determine a solução de (4)

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 4u & \text{para } (x, t) \in [0, \pi] \times [0, +\infty[, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \text{para } t \in [0, +\infty[, \\ u(x, 0) = 0 & \text{para } x \in [0, \pi], \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{para } x \in [0, \pi], \end{cases}$$

onde v_0 é uma função dada.

5. Considere

$$f(x, y, z) = \frac{(-y, x, z)}{x^2 + y^2},$$

$$\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -1 \wedge 1 < x^2 + y^2 < 4\},$$

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + y^2 < 4 \wedge -1 < z < x^2 + y^2 - 2\}.$$

- a) Calcule o fluxo de f através de $\mathcal{A}$ orientada com a normal com terceira componente negativa. (2)
- b) Esboce Ω . Calcule directamente $\iiint_{\Omega} \operatorname{div} f \, dV$. (2)
- c) Use o Teorema da Divergência para confirmar o resultado da alínea anterior. (2)

Cálculo Diferencial e Integral III

Exame - 22 de Janeiro de 2025

LEAer

Duração: 120 minutos

Apresente os cálculos

1. Determine explicitamente a solução do problema de valor inicial (3)

$$y' = 4 - y^2, \quad y(0) = 0.$$

2. Determine um factor integrante da forma $\mu(3t - 2y)$ para (4)

$$(-3 - 3t - 3y) + \left(2 + 3t + \frac{4y}{3}\right) y' = 0.$$

Não resolva a equação exacta que obtiver.

3. Determine a solução geral de (3)

$$y''' + 4y' = -4 - 5e^{-t}.$$

4. Determine a solução de (4)

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 16u & \text{para } (x, t) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, +\infty[, \\ u(0, t) = u(\frac{\pi}{2}, t) = 0 & \text{para } t \in [0, +\infty[, \\ u(x, 0) = 0 & \text{para } x \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{para } x \in [0, \frac{\pi}{2}], \end{cases}$$

onde v_0 é uma função dada.

5. Considere

$$f(x, y, z) = \frac{(-y, x, z)}{x^2 + y^2},$$

$$\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 \wedge 1 < x^2 + y^2 < 4\},$$

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + y^2 < 4 \wedge 3 - x^2 - y^2 < z < 2\}.$$

- a) Calcule o fluxo de f através de $\mathcal{A}$ orientada com a normal com terceira componente positiva. (2)

- b) Esboce Ω . Calcule directamente $\iiint_{\Omega} \operatorname{div} f \, dV$. (2)

- c) Use o Teorema da Divergência para confirmar o resultado da alínea anterior. (2)

Cálculo Diferencial e Integral III
Exame - 22 de Janeiro de 2025
LEAer

Resolução

Por favor, consulte a resolução dos testes dados neste dia.