Cálculo Diferencial e Integral III

Exame - 17 de Janeiro de 2024

LEAer

Duração: 120 minutos

Apresente os cálculos

1. Fazendo a substituição $v = \frac{y}{t}$, determine todas as soluções da equação homogénea (5)

$$y' = \left(\frac{y}{t}\right)^2 + \frac{y}{t}, \quad t > 0,$$

bem como a solução que satisfaz $y(1) = 1$.

2. Seja $\mu \in \mathbb{R}^+$. Determine a solução geral de (3)

$$y''(t) + \mu^2 y(t) = \cosh(\mu t).$$

3. Determine a solução do problema de valores fronteira envolvendo a equação de Laplace (5)

$$\begin{cases} (u_{xx} + u_{yy})(x,y) = 8\sin(2x) & \text{para } (x,y) \in [0,\pi] \times [0,1], \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 & \text{para } y \in [0,1], \\ u(x,0) = 0 & \text{para } x \in [0,\pi], \\ u(x,1) = -2\sin(2x) & \text{para } x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

4. Seja $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Considere o campo

$$F(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{r}.$$

Note que a potência de r no denominador é igual a um. Fixem-se $R_2 > R_1 > 0$. Considere a região

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : R_1 < \|(x,y,z)\| < R_2\right\}.$$

- **a)** Calcule directamente o fluxo de F através das esferas centradas na origem de raios R_1 e R_2. (1)
- **b)** Calcule a divergência de F. (1)
- **c)** Verifique a igualdade do Teorema da Divergência para $\iiint_\Omega \operatorname{div} F \, dV$. (2)

5. Seja $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Tem-se (3)

$$(\partial_x, \partial_y, \partial_z) \times \left(-\frac{y}{r\,(r+z)}, \frac{x}{r\,(r+z)}, 0\right) = \frac{(x,y,z)}{r^3} =: f(x,y,z).$$

Use o Teorema de Stokes para calcular o fluxo de f através da esfera de raio R centrada na origem, no sentido da normal exterior.

Cálculo Diferencial e Integral III

Exame - 17 de Janeiro de 2024

LEAer

Resolução

1. Definindo $v = \frac{y}{t}$, tem-se $y = tv$ e $y' = v + tv'$. Assim,

$$tv' + v = v^2 + v.$$

Simplificando,

$$tv' = v^2. \tag{1}$$

Esta equação é separável, sendo a sua forma canónica

$$\frac{1}{v^2}v' = \frac{1}{t}. \tag{2}$$

As equações (1) e (2) são equivalentes se v é diferente de zero. Mas $v = 0$ é uma solução de (1) para a qual (2) não faz sentido. $v = 0$ corresponde a $y = 0$. Primitivando ambos os membros de (2) em ordem a t,

$$-\frac{1}{v} = \ln t + c,$$

ou seja,

$$v = -\frac{1}{\ln t + c}.$$

Logo, tem-se

$$y = -\frac{t}{\ln t + c}, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

As soluções da equação diferencial do enunciado são a função indenticamente nula e as funções definidas por (3). A solução que satisfaz $y(1) = 1$ é

$$y = \frac{t}{1 - \ln t}.$$

2.

$$(D^2 + \mu^2)y = \cosh(\mu t) \;\Rightarrow\; (D^2 - \mu^2)(D^2 + \mu^2)y = 0.$$

A solução geral desta equação homogénea é

$$y = \alpha \cos(\mu t) + \beta \sin(\mu t) + \gamma \cosh(\mu t) + \delta \sinh(\mu t).$$

Substituindo na equação original, vem

$$(D^2+\mu^2)(\alpha\cos(\mu t)+\beta\sin(\mu t)+\gamma\cosh(\mu t)+\delta\sinh(\mu t))=\cosh(\mu t),$$

$$(D^2+\mu^2)(\gamma\cosh(\mu t)+\delta\sinh(\mu t))=\cosh(\mu t),$$
$$2\gamma\mu^2\cosh(\mu t)+2\delta\mu^2\sinh(\mu t)=\cosh(\mu t),$$

o que implica $\gamma=\frac{1}{2\mu^2}$ e $\delta=0$. A solução geral da equação do enunciado é

$$y=\alpha\cos(\mu t)+\beta\sin(\mu t)+\frac{1}{2\mu^2}\cosh(\mu t),\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

3. Atendendo às condições fronteira em $x=0$ e $x=\pi$, de Dirichlet homogéneas, para cada y fixo prolongamos $u(\,\cdot\,,y)$ como função ímpar em x e periódica de período 2π. O prolongamento pode ser desenvolvido em série de Fourier:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty}[a_n(y)\cos(nx)+b_n(y)\sin(nx)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y)\sin(nx). \end{aligned}$$

As condições fronteira em $x=0$ e em $x=\pi$ estão formalmente satisfeitas. Substituindo na equação diferencial, obtém-se

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-n^2b_n(y)+b_n''(y))\sin(nx)=8\sin(2x)$$

Por unicidade dos coeficientes de Fourier, vem

$$b_n''-n^2b_n=0,\ \text{para } n\neq 2 \qquad \wedge \qquad b_2''-4b_2=8.$$

Logo,

$$\begin{aligned} b_n &= c_n\cosh(ny)+d_n\sinh(ny),\ \text{para } n\neq 2 \\ b_2 &= -2+c_2\cosh(2y)+d_2\sinh(2y). \end{aligned}$$

A função u é

$$u(x,y) = -2\sin(2x)+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cosh(ny)+d_n\sinh(ny))\sin(nx).$$

A equação diferencial está formalmente satisfeita. Para garantir a condição fronteira em $y = 0$, devemos ter

$$u(x,0) \quad = \quad -2\sin(2x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx) = 0.$$

Deduz-se que $c_2 = 2$ e que os outros c_n's são nulos. Portanto,

$$u(x,y) \quad = \quad -2\sin(2x) + 2\cosh(2y)\sin(2x) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sinh(ny)\sin(nx).$$

Resta garantir a condição fronteira em $y = 1$:

$$\begin{aligned} u(x,1) \quad &= \quad -2\sin(2x) + 2\cosh(2)\sin(2x) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sinh(n)\sin(nx) \\ &= \quad -2\sin(2x). \end{aligned}$$

Novamente por unicidade dos coeficientes de Fourier,

$$-2 + 2\cosh(2) + d_2\sinh(2) \quad = \quad -2,$$

sendo os outros d_n's nulos. Como

$$d_2 = -2\coth(2),$$

conclui-se que

$$u(x,y) = -2\sin(2x) + 2\cosh(2y)\sin(2x) - 2\coth(2)\sinh(2y)\sin(2x).$$

4.

a) Tendo em atenção que sobre uma superfície esférica centrada na origem $F = n$, tem-se

$$\iint_{\|(x,y,z)\|=R} F\cdot n\,dS = \iint_{\|(x,y,z)\|=R} 1\,dS = 4\pi R^2.$$

b)

$$\partial_x F_1 = \partial_x \frac{x}{r} = \frac{1}{r} - \frac{x}{r^2}\frac{x}{r} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3},$$

pelo que

$$\operatorname{div} F = \frac{3}{r} - \frac{r^2}{r^3} = \frac{2}{r}.$$

c)

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega \operatorname{div} F\, dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{R_1}^{R_2} \frac{2}{r} r^2 \sin\varphi\, dr d\varphi d\theta \\ &= 4\pi R_2^2 - 4\pi R_1^2 \\ &= \iint_{\|(x,y,z)\|=R_2} F\cdot n\, dS - \iint_{\|(x,y,z)\|=R_1} F\cdot n\, dS.\end{aligned}$$

5. O potencial vector não está definido nem quando $r = 0$ (na origem) nem quando

$$r + z = 0 \;\Leftrightarrow\; z = -\sqrt{x^2+y^2+z^2} \;\Leftrightarrow\; z \leq 0 \wedge x = y = 0$$

(na parte negativa do eixo dos z's). Seja $\epsilon > 0$. Designemos por

$$A(x,y,z) := \left(-\frac{y}{r\,(r+z)}, \frac{x}{r\,(r+z)}, 0\right),$$

um potencial vector de f no complementar da parte negativa do eixo dos z's. Para cada $\epsilon > 0$, seja γ a circunferência descrita parametricamente por

$$\alpha(t) \;=\; \left(\epsilon\cos t, \epsilon \sin t, -\sqrt{R^2-\epsilon^2}\right), \quad t \in (0, 2\pi),$$

Como A é C^1 na região $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \|(x,y)\| \geq \epsilon \vee z > 0\}$, e f é contínua sobre a esfera de raio R, usando o Teorema de Stokes obtém-se

$$\begin{aligned}&\iint_{\|(x,y,z)\|=R} f\cdot n\, dS \;=\; \lim_{\epsilon\searrow 0}\iint_{\substack{\|(x,\,y,\,z)\| \,=\, R\\ \|(x,\,y)\| \,>\, \epsilon \,\vee\, z \,>\, 0}} f\cdot n\, dS \\ &= \lim_{\epsilon\searrow 0}\iint_{\substack{\|(x,\,y,\,z)\| \,=\, R\\ \|(x,\,y)\| \,>\, \epsilon \,\vee\, z \,>\, 0}} \nabla\times A\cdot n\, dS \\ &= \lim_{\epsilon\searrow 0}\int_\gamma A\cdot d\alpha \\ &= \lim_{\epsilon\searrow 0}\int_0^{2\pi} A(\alpha(t))\cdot\alpha'(t) dt \\ &= \lim_{\epsilon\searrow 0}\frac{\epsilon^2}{R\left(R-\sqrt{R^2-\epsilon^2}\right)}\int_0^{2\pi} (-\sin t, -\cos t, 0)\cdot(-\sin t, -\cos t, 0)\, dt \\ &= 2\pi \lim_{\epsilon\searrow 0}\left(\frac{R+\sqrt{R^2-\epsilon^2}}{R}\right) \\ &= 4\pi.\end{aligned}$$