

Cálculo Diferencial e Integral III

Exame - 23 de Janeiro de 2023

LMAC

Duração: 120 minutos

Apresente os cálculos

1. Determine a solução geral de (3)

$$y'' + y = t^2 + 1.$$

2. Considere a superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 4 \wedge z = xy\}$ (5)
e o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definido por $F(x, y, z) = (-y, x, z)$.
Verifique ambos os membros da igualdade do Teorema de Stokes para o fluxo
do rotacional de F através de S .

3. Determine a solução do problema (4)

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + c^2 \cos x & \text{se } (x, t) \in [0, 2\pi] \times [0, \infty), \\ u_x(0, t) = u_x(2\pi, t) = 0 & \text{se } t \in [0, \infty), \\ u(x, 0) = 0 & \text{se } x \in [0, 2\pi], \\ u_t(x, 0) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right) & \text{se } x \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

4. Considere a equação diferencial

$$ty'' - (1 + 2t)y' + (1 + t)y = 0. \quad (*)$$

- a) Note que se $y' = y$, então $y'' = y'$ e a equação é satisfeita. Com base (2)
neste facto, determine uma família não trivial de soluções $\{cy_1 : c \in \mathbb{R}\}$
de (*).
- b) Determine o Wronskiano, W , que satisfaz $W(1) = 1$. (1)
- c) Use a alínea anterior para obter uma equação diferencial de primeira (1)
ordem satisfeita por uma solução de (*) independente de y_1 . Classifique
a equação de primeira ordem que obteve e resolva essa equação. Escreva
a solução geral de (*).

5. Considere a função $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [2n, 2n+1), \text{ com } n \in \mathbb{N}_0, \\ 0 & \text{se } t \in [2n+1, 2n+2), \text{ com } n \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Calcule a transformada de Laplace de f e simplifique a resposta. (2)

6. Seja f contínua e periódica de período 2π e satisfazendo (2)

$$f(x + \pi) = -f(x)$$

para todo o x . O que pode afirmar sobre os coeficientes da série de Fourier
de f no intervalo $[-\pi, \pi]$? Justifique.