**B**

# Cálculo Diferencial e Integral III

2º Exame - 22 de Fevereiro de 2022

LEAer

**Resolução**

**1.** (i) $\left(D-\frac{1}{2}\right)^2 X = 0 \Leftrightarrow X(x) = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 x e^{\frac{x}{2}}$; as soluções que satisfazem $X(0)=0$ são $X(x) = c_2 x e^{\frac{x}{2}}$.
(ii)

$$\begin{aligned}&\left(\left(D-\frac{1}{2}\right)^2 + (\sqrt{\mu})^2\right) X = 0\\ &\Leftrightarrow X(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(c_1 \cos\left(\sqrt{\mu}x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\mu}x\right)\right),\end{aligned}$$

as soluções que satisfazem $X(0)=0$ são $X(x) = c_2 e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\sqrt{\mu}x\right)$.
(iii)

$$\begin{aligned}&\left(\left(D-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{-\mu}\right)^2\right) X = 0\\ &\Leftrightarrow \left(D-\frac{1}{2}+\sqrt{-\mu}\right)\left(D-\frac{1}{2}-\sqrt{-\mu}\right) X\\ &\Leftrightarrow X(x) = \tilde{c}_1 e^{\frac{x}{2}-\sqrt{-\mu}x} + \tilde{c}_2 e^{\frac{x}{2}+\sqrt{-\mu}x}\\ &\Leftrightarrow X(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(c_1 \cosh\left(\sqrt{-\mu}x\right) + c_2 \sinh\left(\sqrt{-\mu}x\right)\right),\end{aligned}$$

as soluções que satisfazem $X(0)=0$ são $X(x) = c_2 e^{\frac{x}{2}} \sinh(\sqrt{-\mu}x)$.

**2.** Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros de

$$y'' - y' = -3H(t-1) + 3H(t-4),$$

obtém-se

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - sY(s) + y(0) = -\frac{3}{s}(e^{-s} - e^{-4s}),$$

o que é equivalente a

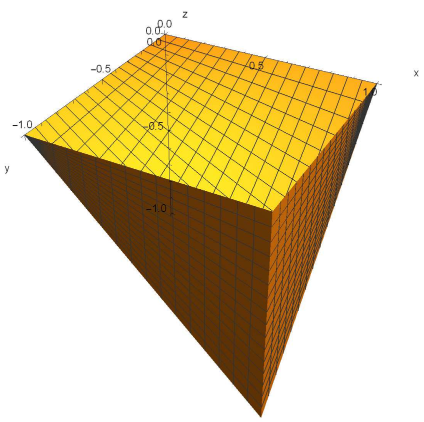
$$Y(s) = \frac{1}{s}y(0) + \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right)y'(0) - 3\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}\right)(e^{-s} - e^{-4s}).$$

Uma vez que a transformada inversa de $\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}$ é $(t+1-e^t)$ e que, para $c>0$, a transformada de Laplace inversa de $e^{-cs}F(s)$ é $f(t-c)H(t-c)$, conclui-se que

$$\begin{aligned} y(t) &= y(0)+y'(0)(e^t-1)-3(t-e^{t-1})H(t-1) \\ &\quad +3(t-3-e^{t-4})H(t-4). \end{aligned}$$

**3.**

**a)** A região $R$ é limitada por cima pelo plano $z=0$ com normal $(0,0,1)$. Quando $x=1$, $0\geq z\geq xy|_{x=1}=y$ e $n=(1,0,0)$. Quando $y=-1$, $0\geq z\geq xy|_{y=-1}=-x$ e $n=(0,-1,0)$. A região $R$ é limitada por baixo pela superfície descrita parametricamente por $(x,y,xy)$ que tem como normal (não unitária) $-(-\partial_x(xy),-\partial_y(xy),1)=(y,x,-1)$.




$$\begin{aligned}
\iint_{\partial R\cap\{z=0\}} F\cdot n\,dS &= \int_0^1\int_{-1}^0 z|_{z=0}\,dx\,dy = 0,\\
\iint_{\partial R\cap\{x=1\}} F\cdot n\,dS &= \int_{-1}^0\int_y^0 x|_{x=1}\,dz\,dy = \frac{1}{2},\\
\iint_{\partial R\cap\{y=-1\}} F\cdot n\,dS &= \int_0^1\int_{-x}^0 -y|_{y=-1}\,dz\,dx = \frac{1}{2},\\
\iint_{\partial R\cap\{z=xy\}} F\cdot n\,dS &= \int_0^1\int_0^1 (x,y,z)\cdot(y,x,-1)|_{z=xy}\,dx\,dy\\
&= \int_0^1\int_{-1}^0 xy\,dx\,dy = -\frac{1}{4},\\
\iint_{\partial R} F\cdot n\,dS &= 0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

**b)**
$$\iint_{\partial R} F \cdot n \, dS = \iiint_R \operatorname{div} F \, dV = \int_0^1 \int_{-1}^0 \int_{xy}^0 3 \, dz \, dy \, dx = \frac{3}{4}.$$

**4.**

**a)** Expandindo $v$ em série de Fourier para cada $t$ fixo, obtém-se

$$u(x,t) = e^{\frac{x}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(nx). \tag{1}$$

As condições fronteira estão formalmente satisfeitas. Isto conduz a

$$\begin{aligned}
u_t &= e^{\frac{x}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t) \sin(nx), \\
u_x &= \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(nx) + e^{\frac{x}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n b_n(t) \cos(nx), \\
u_{xx} &= \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(nx) + e^{\frac{x}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n b_n(t) \cos(nx) \\
&\quad - e^{\frac{x}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n(t) \sin(nx) \\
-u_x + u_{xx} &= -\frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(nx) - e^{\frac{x}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n(t) \sin(nx).
\end{aligned}$$

A igualdade $u_t = -u_x + u_{xx}$ escreve-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t) \sin(nx) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{4} + n^2 \right) b_n(t) \sin(nx).$$

Por unicidade dos coeficientes de Fourier, para todo o $n$ deve ter-se

$$b_n'(t) = -\left( \frac{1}{4} + n^2 \right) b_n(t) \;\Leftrightarrow\; b_n(t) = c_n e^{-\left(\frac{1}{4} + n^2\right)t}.$$

Substituindo em (1), obtém-se

$$u(x,t) = e^{\frac{x}{2} - \frac{t}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \sin(nx).$$

Resta garantir a condição inicial:

$$u(x,0) = e^{\frac{x}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx) = u_0(x),$$

ou seja
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx) = e^{-\frac{x}{2}} u_0(x).$$
Os $c_n$'s são os coeficientes de Fourier da função $x \mapsto e^{-\frac{x}{2}} u_0(x)$, ou seja da função periódica e ímpar $v_0(\,\cdot\,) := v(\,\cdot\,, 0)$. Assim,
$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{x}{2}} u_0(x) \sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-\frac{x}{2}} u_0(x) \sin(nx)\, dx.$$

**b)**

$$\begin{aligned}
u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \ &\Rightarrow\ u(0,0) = u(\pi,0) = 0 \ \Rightarrow\ u_0(0) = u_0(\pi) = 0,\\
u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \ &\Rightarrow\ u_t(0,t) = u_t(\pi,t) = 0\\
&\Rightarrow\ (u_{xx} - u_x)(0,t) = (u_{xx} - u_x)(\pi,t) = 0\\
&\Rightarrow\ (u_{xx} - u_x)(0,0) = (u_{xx} - u_x)(\pi,0) = 0\\
&\Rightarrow\ u_0''(0) - u_0'(0) = u_0''(\pi) - u'(\pi) = 0.
\end{aligned}$$

**c)**

$$w(x,t) = e^{\frac{-2x+t}{4}} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$$
satisfaz a equação do calor, $w_t = w_{xx}$, com condições fronteira de Dirichlet homogéneas, e condição inicial $w(x,0) = e^{-\frac{x}{2}} u_0(x)$.

**5.** A equação da recta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(x_0, f(x_0))$ é
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$
Se o segmento de recta que é dado pela intersecção desta recta com o primeiro quadrante é dividido pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ em dois pedaços, tendo o da esquerda o dobro do comprimento do da direita, então quando $x = \frac{3}{2}x_0$, tem-se $y = 0$. Logo, tem-se
$$0 = f(x_0) + \frac{1}{2} x_0 f'(x_0).$$
Isto implica que
$$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = -\frac{2}{x_0}.$$
O ponto $x_0$ é arbitrário. Assim,
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{2}{x}.$$

Resolvendo esta equação para $f$ obtém-se

$$\ln f(x) = -\ln x^2 + \ln c, \quad \text{para algum } c > 0.$$

Conclui-se que

$$f(x) = \frac{c}{x^2} \quad \text{para algum } c > 0.$$