A

Cálculo Diferencial e Integral III

2º Exame - 22 de Fevereiro de 2022

LEAer

Resolução

1. (i) $\left(D+\frac{1}{2}\right)^2 X=0 \Leftrightarrow X(x)=c_1e^{-\frac{x}{2}}+c_2xe^{-\frac{x}{2}}$; as soluções que satisfazem $X(0)=0$ são $X(x)=c_2xe^{-\frac{x}{2}}$.

(ii)

$$\begin{aligned}&\left(\left(D+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\lambda}\right)^2\right)X=0\\&\Leftrightarrow \left(D+\frac{1}{2}+\sqrt{\lambda}\right)\left(D+\frac{1}{2}-\sqrt{\lambda}\right)X\\&\Leftrightarrow X(x)=\tilde{c}_1e^{-\frac{x}{2}-\sqrt{\lambda}x}+\tilde{c}_2e^{-\frac{x}{2}+\sqrt{\lambda}x}\\&\Leftrightarrow X(x)=e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1\cosh\left(\sqrt{\lambda}x\right)+c_2\sinh\left(\sqrt{\lambda}x\right)\right),\end{aligned}$$

as soluções que satisfazem $X(0)=0$ são $X(x)=c_2e^{-\frac{x}{2}}\sinh\left(\sqrt{\lambda}x\right)$.

(iii)

$$\begin{aligned}&\left(\left(D+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{-\lambda}\right)^2\right)X=0\\&\Leftrightarrow X(x)=e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right)+c_2\sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right)\right),\end{aligned}$$

as soluções que satisfazem $X(0)=0$ são $X(x)=c_2e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right)$.

2. Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros de

$$y''+y'=2H(t-1)-2H(t-2),$$

obtém-se

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+sY(s)-y(0)=\frac{2}{s}(e^{-s}-e^{-2s}),$$

o que é equivalente a

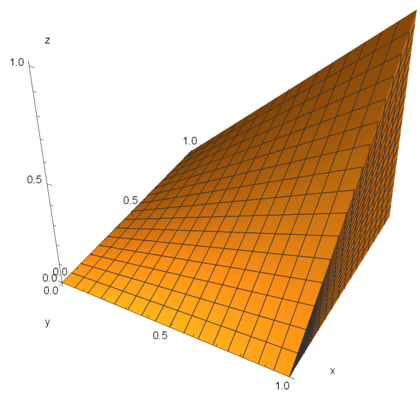
$$Y(s)=\frac{1}{s}y(0)+\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)y'(0)+2\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\right)(e^{-s}-e^{-2s}).$$

Uma vez que a transformada inversa de $\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$ é $(t - 1 + e^{-t})$ e que, para $c > 0$, a transformada de Laplace inversa de $e^{-cs}F(s)$ é $f(t-c)H(t-c)$, conclui-se que

$$\begin{aligned} y(t) &= y(0) + y'(0)(1 - e^{-t}) + 2(t - 2 + e^{-t+1})H(t-1) \\ &\quad -2(t - 3 + e^{-t+2})H(t-2). \end{aligned}$$

3.

a) A região R é limitada por baixo pelo plano $z = 0$ com normal $(0, 0, -1)$. Quando $x = 1$, $0 \leq z \leq xy|_{x=1} = y$ e $n = (1, 0, 0)$. Quando $y = 1$, $0 \leq z \leq xy|_{y=1} = x$ e $n = (0, 1, 0)$. A região R é limitada por cima pela superfície descrita parametricamente por (x, y, xy) que tem como normal (não unitária) $(-\partial_x(xy), -\partial_y(xy), 1) = (-y, -x, 1)$.



$$\begin{aligned} \iint_{\partial R \cap \{z=0\}} F \cdot n \, dS &= \int_0^1 \int_0^1 -z|_{z=0} \, dx \, dy = 0, \\ \iint_{\partial R \cap \{x=1\}} F \cdot n \, dS &= \int_0^1 \int_0^y x|_{x=1} \, dz \, dy = \frac{1}{2}, \\ \iint_{\partial R \cap \{y=1\}} F \cdot n \, dS &= \int_0^1 \int_0^x y|_{y=1} \, dz \, dx = \frac{1}{2}, \\ \iint_{\partial R \cap \{z=xy\}} F \cdot n \, dS &= \int_0^1 \int_0^1 (x, y, z) \cdot (-y, -x, 1)|_{z=xy} \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 -xy \, dx \, dy = -\frac{1}{4}, \\ \iint_{\partial R} F \cdot n \, dS &= 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

b)

$$\iint_{\partial R} F \cdot n \, dS = \iiint_R \operatorname{div} F \, dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{xy} 3 \, dz \, dy \, dx = \frac{3}{4}.$$

4.

a) Expandindo v em série de Fourier para cada t fixo, obtém-se

$$u(x,t) = e^{-\frac{x}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(nx). \tag{1}$$

As condições fronteira estão formalmente satisfeitas. Isto conduz a

$$\begin{aligned}
u_t &= e^{-\frac{x}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t) \sin(nx), \\
u_x &= -\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(nx) + e^{-\frac{x}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n b_n(t) \cos(nx), \\
u_{xx} &= \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(nx) - e^{-\frac{x}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n b_n(t) \cos(nx) \\
&\quad - e^{-\frac{x}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n(t) \sin(nx) \\
u_x + u_{xx} &= -\frac{1}{4} e^{-\frac{x}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(nx) - e^{-\frac{x}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n(t) \sin(nx).
\end{aligned}$$

A igualdade $u_t = u_x + u_{xx}$ escreve-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t) \sin(nx) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4} + n^2 \right) b_n(t) \sin(nx).$$

Por unicidade dos coeficientes de Fourier, para todo o n deve ter-se

$$b_n'(t) = -\left(\frac{1}{4} + n^2 \right) b_n(t) \;\Leftrightarrow\; b_n(t) = c_n e^{-\left(\frac{1}{4} + n^2\right)t}.$$

Substituindo em (1), obtém-se

$$u(x,t) = e^{-\frac{x}{2} - \frac{t}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \sin(nx).$$

Resta garantir a condição inicial:

$$u(x,0) = e^{-\frac{x}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx) = u_0(x),$$

ou seja

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx) = e^{\frac{x}{2}} u_0(x).$$

Os c_n's são os coeficientes de Fourier da função $x \mapsto e^{\frac{x}{2}} u_0(x)$, ou seja da função periódica e ímpar $v_0(\,\cdot\,) := v(\,\cdot\,,0)$. Assim,

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{x}{2}} u_0(x) \sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\frac{x}{2}} u_0(x) \sin(nx)\, dx.$$

b)

$$\begin{aligned} u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad &\Rightarrow \quad u(0,0) = u(\pi,0) = 0 \;\Rightarrow\; u_0(0) = u_0(\pi) = 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad &\Rightarrow \quad u_t(0,t) = u_t(\pi,t) = 0 \\ &\Rightarrow \quad (u_{xx} + u_x)(0,t) = (u_{xx} + u_x)(\pi,t) = 0 \\ &\Rightarrow \quad (u_{xx} + u_x)(0,0) = (u_{xx} + u_x)(\pi,0) = 0 \\ &\Rightarrow \quad u_0''(0) + u_0'(0) = u_0''(\pi) + u'(\pi) = 0. \end{aligned}$$

c)

$$w(x,t) = e^{\frac{2x+t}{4}} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

satisfaz a equação do calor, $w_t = w_{xx}$, com condições fronteira de Dirichlet homogéneas, e condição inicial $w(x,0) = e^{\frac{x}{2}} u_0(x)$.

5. A equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Se o segmento de recta que é dado pela intersecção desta recta com o primeiro quadrante é dividido pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ em dois pedaços, tendo o da esquerda metade do comprimento do da direita, então quando $x = 3x_0$, tem-se $y = 0$. Logo, tem-se

$$0 = f(x_0) + 2x_0 f'(x_0).$$

Isto implica que

$$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = -\frac{1}{2x_0}.$$

O ponto x_0 é arbitrário. Assim,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{2x}.$$

Resolvendo esta equação para f obtém-se

$$\ln f(x) = -\ln\sqrt{x} + \ln c, \quad \text{para algum } c > 0.$$

Conclui-se que

$$f(x) = \frac{c}{\sqrt{x}} \quad \text{para algum } c > 0.$$