

Cálculo Diferencial e Integral III

2º Exame - 22 de Fevereiro de 2022

LEAer

Duração: 120 minutos

Apresente os cálculos

1. Usando o método do aniquilador, determine a solução geral de (4.5)

$$X'' - X' + \frac{1}{4}X = -\mu X,$$

bem como as soluções que satisfazem $X(x=0) = 0$, nos casos (i) $\mu = 0$
(ii) $\mu > 0$ e (iii) $\mu < 0$.

2. Usando a transformada de Laplace, determine a solução de (3.5)

$$y'' - y' = \begin{cases} -3 & \text{se } 1 \leq t \leq 4, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

que satisfaz $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y'_0$.

3. Considere a região

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0, xy \leq z \leq 0\},$$

e o campo vectorial $F : R \rightarrow \mathbb{R}^3$, definido por $F(x, y, z) = (x, y, z)$.

- a) Usando a definição, calcule o fluxo de F através de cada uma das quatro superfícies que constituem a fronteira de R , no sentido da normal exterior a R . (2.5)

- b) Confirme o resultado usando o Teorema da Divergência. (2)

4. Considere o problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u_x & \text{para } (x, t) \in [0, \pi] \times [0, +\infty), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \text{para } t \in [0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{para } x \in [0, \pi], \end{cases}$$

onde $u_0 \in C^3[-\pi, \pi]$ é dada.

- a) Determine uma solução do problema da forma (3.5)

$$u(x, t) = e^{\frac{x}{2}}v(x, t),$$

com v ímpar em x e de período 2π .

- b) Determine as condições de compatibilidade para que exista uma solução (1)

verificando $u \in C^1(0, \pi] \times [0, \infty[)$ tal que u_{xx} existe e pertence a $C^0([0, \pi] \times [0, \infty[)$.

- c) Qual é o problema satisfeito por $w(x, t) = e^{\frac{-2x+t}{4}}u(x, t)$? (1)

5. Determine as funções $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ que satisfazem a seguinte condição: (2)
 dado um $x_0 > 0$, o segmento de recta que é dado pela intersecção da recta tangente ao gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$ com o primeiro quadrante é dividido pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ em dois pedaços, tendo o da esquerda o dobro do comprimento de o da direita.

