A

Cálculo Diferencial e Integral III

2º Exame - 22 de Fevereiro de 2022

LEAer

Duração: 120 minutos

Apresente os cálculos

1. Usando o método do aniquilador, determine a solução geral de (4.5)

$$X'' + X' + \frac{1}{4}X = \lambda X,$$

bem como as soluções que satisfazem $X(x=0)=0$, nos casos (i) $\lambda = 0$ (ii) $\lambda > 0$ e (iii) $\lambda < 0$.

2. Usando a transformada de Laplace, determine a solução de (3.5)

$$y'' + y' = \begin{cases} 2 & \text{se } 1 \le t \le 2, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

que satisfaz $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y_0'$.

3. Considere a região

$$R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le xy\},$$

e o campo vectorial $F : R \to \mathbb{R}^3$, definido por $F(x,y,z) = (x,y,z)$.

a) Usando a definição, calcule o fluxo de F através de cada uma das quatro superfícies que constituem a fronteira de R, no sentido da normal exterior a R. (2.5)

b) Confirme o resultado usando o Teorema da Divergência. (2)

4. Considere o problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_x & \text{para } (x,t) \in [0,\pi] \times [0,+\infty), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{para } t \in [0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{para } x \in [0,\pi], \end{cases}$$

onde $u_0 \in C^3[-\pi,\pi]$ é dada.

a) Determine uma solução do problema da forma (3.5)

$$u(x,t) = e^{-\frac{x}{2}} v(x,t),$$

com v ímpar em x e de período 2π.

b) Determine as condições de compatibilidade para que exista uma solução verificando $u \in C^1(0,\pi] \times [0,\infty[)$ tal que u_{xx} existe e pertence a $C^0([0,\pi] \times [0,\infty[)$. (1)

c) Qual é o problema satisfeito por $w(x,t) = e^{\frac{2x+t}{4}} u(x,t)$? (1)

5. Determine as funções $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ que satisfazem a seguinte condição: dado um $x_0 > 0$, o segmento de recta que é dado pela intersecção da recta tangente ao gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$ com o primeiro quadrante é dividido pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ em dois pedaços, tendo o da esquerda metade do comprimento de o da direita. (2)