B

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Exame - 10 de Fevereiro de 2022

LEAer

Resolução

1. A equação é separável:

$$-\frac{3}{y^4}y' = \sin t.$$

Obtém-se

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{y^3}\right) = \sin t \quad e \quad \frac{1}{y^3} - \frac{1}{y^3(\pi)} = -\cos t + \cos(\pi).$$

A solução é

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{y_0^3} - 1 - \cos t}}.$$

O intervalo máximo é o maior intervalo que contém π em que o denominador não se anula.
Para $0 < y_0 < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ a solução está definida em $\mathbb{R}$.
Para $y_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ a solução está definida em $]0, 2\pi[$.
Para $y_0 > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ a solução está definida em $\left]\arccos\left(\frac{1}{y_0^3} - 1\right), 2\pi - \arccos\left(\frac{1}{y_0^3} - 1\right)\right[$.

2.

3. Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação diferencial, obtém-se

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - Y(s) = \frac{1}{s-1},$$

de onde se tira

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s}{s^2-1}y(0) + \frac{1}{s^2-1}y'(0) + \frac{1}{(s-1)^2(s+1)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right)y(0) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right)y'(0) \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{s+1}. \end{aligned}$$

Calculando a transformada de Laplace inversa de ambos os membros, conclui-se que

$$\begin{aligned} y(t) &= \cosh(t)y(0) + \sinh(t)y'(0) + \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}\sinh(t) \\ &= \cosh(t)y(0) + \sinh(t)\left(y'(0) - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}te^t. \end{aligned}$$

4.

a)

$$\begin{aligned} \iint_P n \cdot n \, dS &= \iint_P dS \\ &= \iint_{2x^2+2y^2\leq 1} \sqrt{16x^2+16y^2+1}\, dx\, dy \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1/\sqrt{2}} \sqrt{16r^2+1} r\, dr\, d\theta \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{2}{3}(16r^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{13\pi}{12}. \end{aligned}$$

b) π.

5.

a)

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 t}[\alpha_n \cos(n(x-t)) + \beta_n \sin(n(x-t))].$$

b)
c)
d)