A

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Exame - 10 de Fevereiro de 2022

LEAer

Resolução

1. A equação é separável:

$$-\frac{5}{y^6}y' = \cos t.$$

Obtém-se

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{y^5}\right) = \cos t \quad e \quad \frac{1}{y^5} - \frac{1}{y^5(\pi/2)} = \sin t - \sin(\pi/2).$$

A solução é

$$y = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{y_0^5} - 1 + \sin t}}.$$

O intervalo máximo é o maior intervalo que contém $\frac{\pi}{2}$ em que o denominador não se anula.

Para $0 < y_0 < \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$ a solução está definida em $\mathbb{R}$.

Para $y_0 = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$ a solução está definida em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

Para $y_0 > \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$ a solução está definida em $\left]-\arcsin\left(\frac{1}{y_0^5} - 1\right), \pi + \arcsin\left(\frac{1}{y_0^5} - 1\right)\right[$.

2.

a)

$$\begin{aligned}
e^{Jt} &= I + tJ - \frac{t^2}{2}I - \frac{t^3}{3!}J + \frac{t^4}{4!}I + \dots \\
&= I\left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + \dots\right) + J\left(t - \frac{t^3}{3!} + \dots\right) \\
&= I\cos t + J\sin t \\
&= \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

b) Como I e J comutam, tem-se $e^{(-n^2I+nJ)t} = e^{-n^2It}e^{nJt}$.
A matriz $-n^2tI$ é diagonal. A sua exponencial também é diagonal, tendo na diagonal e^{-n^2t}. Assim, $e^{-n^2It} = e^{-n^2t}I$. Logo,

$$e^{(-n^2I+nJ)t} = e^{-n^2It}e^{J(nt)} = e^{-n^2t}\begin{bmatrix} \cos(nt) & \sin(nt) \\ -\sin(nt) & \cos(nt) \end{bmatrix}.$$

3. Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação diferencial, obtém-se

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 4Y(s) = \frac{1}{s-2},$$

de onde se tira

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s}{s^2-4}y(0) + \frac{1}{s^2-4}y'(0) + \frac{1}{(s-2)^2(s+2)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+2}\right)y(0) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+2}\right)y'(0) \\ &\quad + \frac{1}{4}\frac{1}{(s-2)^2} - \frac{1}{16}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{16}\frac{1}{s+2}. \end{aligned}$$

Calculando a transformada de Laplace inversa de ambos os membros, conclui-se que

$$\begin{aligned} y(t) &= \cosh(2t)y(0) + \frac{1}{2}\sinh(2t)y'(0) + \frac{1}{4}te^{2t} - \frac{1}{8}\sinh(2t) \\ &= \cosh(2t)y(0) + \frac{1}{2}\sinh(2t)\left(y'(0) - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}te^{2t}. \end{aligned}$$

4.

a) A superfície é parametrizada por $(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$ para $x^2 + y^2 \leq 2$, onde $f(x, y) = x^2 + y^2$. Como por definição se tem que $n \cdot n = 1$, segue-se que

$$\begin{aligned} \iint_P n \cdot n \, dS &= \iint_P dS \\ &= \iint_{x^2+y^2\leq 2} \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1}\, dx\, dy \\ &= \iint_{x^2+y^2\leq 2} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dx\, dy \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4r^2+1}\, r\, dr\, d\theta \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3}(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{13\pi}{3}. \end{aligned}$$

b) A fronteira de P é parametrizada por $\theta \mapsto (\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta, 2)$, onde $\theta \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned}\iint_P \operatorname{rot} F \cdot n\, dS &= \int_{\partial P} F \cdot dg \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sqrt{2}\sin\theta, \sqrt{2}\cos\theta, 2) \cdot (-\sqrt{2}\sin\theta, \sqrt{2}\cos\theta, 0)\, d\theta \\ &= 4\pi.\end{aligned}$$

5.

a) Para cada t fixo, prolongamos $u(\,\cdot\,, t)$ como função periódica em x, de período 2π. Desenvolvendo esta função em série de Fourier, obtém-se

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(t)\cos(nx) + b_n(t)\sin(nx)]. \tag{1}$$

As condições fronteira estão formalmente satisfeitas. Substituindo esta expressão na equação diferencial, chega-se a

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty} [a_n'(t)\cos(nx) + b_n'(t)\sin(nx)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [-n^2 a_n(t)\cos(nx) - n^2 b_n(t)\sin(nx)] \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} [-n a_n(t)\sin(nx) + n b_n(t)\cos(nx)].\end{aligned}$$

Atendendo à unicidade dos coeficientes de Fourier, para todo o $n \in \mathbb{N}$ deve ser satisfeito o sistema

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -n^2 & n \\ -n & -n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Da alínea **1b)** sabemos que

$$\begin{aligned} a_n(t) &= e^{-n^2 t}(\alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt)), \\ b_n(t) &= e^{-n^2 t}(-\alpha_n \sin(nt) + \beta_n \cos(nt)).\end{aligned}$$

Substituindo em (1) e usando as fórmulas para o seno da soma e para o coseno da soma, conclui-se que

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 t}[\alpha_n \cos(n(x+t)) + \beta_n \sin(n(x+t))].$$

Finalmente, para garantir a condição inicial, deve ter-se

$$\sum_{n=0}^{\infty}[\alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx)] = u_0(x).$$

Logo, os α_n e os β_n devem ser os coeficientes de Fourier de u_0, isto é

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_0(x)\,dx, \\
\alpha_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_0(x)\cos(nx)\,dx, \text{ para } n > 0 \\
\beta_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_0(x)\sin(nx)\,dx.
\end{aligned}$$

b)

$$u(-\pi,t) = u(\pi,t) \;\Rightarrow\; u(-\pi,0) = u(\pi,0) \;\Rightarrow\; u_0(-\pi) = u_0(\pi).$$

$$u_x(-\pi,t) = u_x(\pi,t) \;\Rightarrow\; u_x(-\pi,0) = u_x(\pi,0) \;\Rightarrow\; u_0'(-\pi) = u_0'(\pi).$$

$$\begin{aligned}
u(-\pi,t) = u(\pi,t) &\;\Rightarrow\; u_t(-\pi,t) = u_t(\pi,t) \\
&\;\Rightarrow\; u_{xx}(-\pi,t) + u_x(-\pi,t) = u_{xx}(\pi,t) + u_x(\pi,t) \\
&\;\Rightarrow\; u_{xx}(-\pi,0) + u_x(-\pi,0) = u_{xx}(\pi,0) + u_x(\pi,0) \\
&\;\Rightarrow\; u_0''(-\pi) + u_0'(-\pi) = u_0''(\pi) + u_0'(\pi),
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_0'(-\pi) = u_0'(\pi) \\ u_0''(-\pi) + u_0'(-\pi) = u_0''(\pi) + u_0'(\pi) \end{array}\right\} \Rightarrow\; u_0''(-\pi) = u_0''(\pi).$$

As condições de compatibilidade são $u_0(-\pi) = u_0(\pi)$, $u_0'(-\pi) = u_0'(\pi)$ e $u_0''(-\pi) = u_0''(\pi)$.

c) Seja $E(t) = \int_{-\pi}^{\pi} u^2(x,t)\,dx$.

$$\begin{aligned}
E'(t) &= 2\int_{-\pi}^{\pi} u u_t\,dx \;=\; 2\int_{-\pi}^{\pi} u(u_{xx} + u_x)\,dx \\
&= (uu_x)\big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} u_x^2\,dx + u^2\big|_{-\pi}^{\pi} \;=\; -\int_{-\pi}^{\pi} u_x^2\,dx
\end{aligned}$$

porque $u(-\pi,t) = u(\pi,t)$ e $u_x(-\pi,t) = u_x(\pi,t)$. Consequentemente, $E'(t) \le 0$. Isto prova unicidade de solução. Com efeito, a diferença de duas soluções satisfaz o mesmo problema com condição inicial u_0 nula, pelo que $E(0) = 0$. Como $E(t) \ge 0$, $E(t) \equiv 0$, e u (a diferença de duas soluções) é identicamente nula.

d) Seja $M = \max_{x\in[-\pi,\pi]} |u_0(x)|$. Começamos por observar para todo o $n \in \mathbb{N}_0$, $|\alpha_n| \leq 2M$ e $|\beta_n| \leq 2M$. As funções u_0 para as quais a solução decai com e^{-t} são aquelas com média nula. Com efeito, neste caso tem-se

$$\begin{aligned}
|u(x,t)| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t}[\alpha_n \cos(n(x+t)) + \beta_n \sin(n(x+t))]\right| \\
&\leq e^{-t}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n^2-1)t}|\alpha_n \cos(n(x+t)) + \beta_n \sin(n(x+t))| \\
&\leq 4Me^{-t}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n^2-1)t} \leq 4Me^{-t}\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-t})^{n-1} \\
&\leq 4Me^{-t}\frac{1}{1-e^{-t}} \leq \frac{4M}{1-e^{-1}}e^{-t},
\end{aligned}$$

para $t \geq 1$. Por outro lado, se u_0 não tem média nula, então $\alpha_0 \neq 0$ e $u(x,t) = \alpha_0 +$ um termo que decai com e^{-t}, pelo que u não decai com e^{-t}.