B

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Exame - 10 de Fevereiro de 2022

LEAer

Duração: 120 minutos

Apresente os cálculos

1. Resolva o problema de valor inicial $y' + \frac{y^4}{3}\sin t = 0, \quad y(\pi) = y_0$, onde $y_0 > 0$, indicando o intervalo máximo de existência da solução. (2)

2. Seja $n \in \mathbb{N}$, I a matriz identidade 2×2, e $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Tendo em atenção que $J^2 = -I$, mostre que $e^{Jt} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$. (2)

b) Use a alínea anterior para calcular $e^{(-n^2 I + nJ)t}$. Justifique. (2.5)

3. Usando a transformada de Laplace, calcule a solução de (2.5)

$$y'' - y = e^t, \quad y(0) = y_0, \ y'(0) = y_0'.$$

4. Considere $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -2x^2 - 2y^2 \geq -1\}$.

a) Calcule o fluxo da normal a P com terceira componente positiva através de P. Simplifique o resultado. (2)

b) Usando o Teorema de Stokes, calcule o fluxo do rotacional de $(x, y, z) \mapsto (-y, x, z)$ através de P. (2)

5. Considere o problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u_x & \text{para } (x,t) \in [-\pi, \pi] \times [0, +\infty), \\ u(-\pi, t) = u(\pi, t) & \text{para } t \in [0, +\infty), \\ u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t) & \text{para } t \in [0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{para } x \in [-\pi, \pi], \end{cases}$$

onde $u_0 \in C^3[-\pi, \pi]$ é dada.

a) Determine uma solução do problema. Simplifique a resposta. (3)

b) Determine as condições de compatibilidade para que exista uma solução verificando $u \in C^1([-\pi, \pi] \times [0, \infty[)$ tal que u_{xx} existe e pertence a $C^0([-\pi, \pi] \times [0, \infty[)$. (1.5)

c) Prove unicidade de solução. (1.5)

d) Caracterize as funções u_0 para as quais a solução decai com e^{-t}, ou seja, existe uma constante $c > 0$ tal que $|u(x, t)| \leq ce^{-t}$. (1)