

Apontamentos para a resolução.

I.1.A. O domínio da função é a união do conjunto em que $y > 1$ com o conjunto em que $y \leq -1$.

$$y - 1 = -\sqrt{(y - 1)^2} \text{ para } y < 1.$$

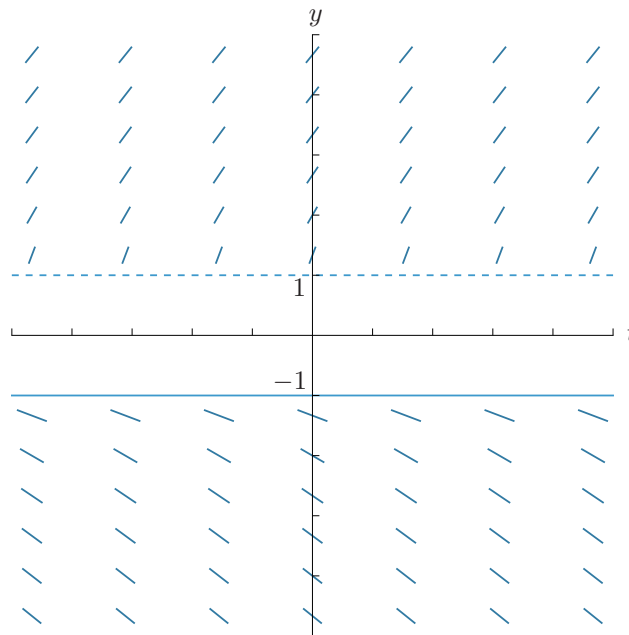
Portanto, para $y > 1$

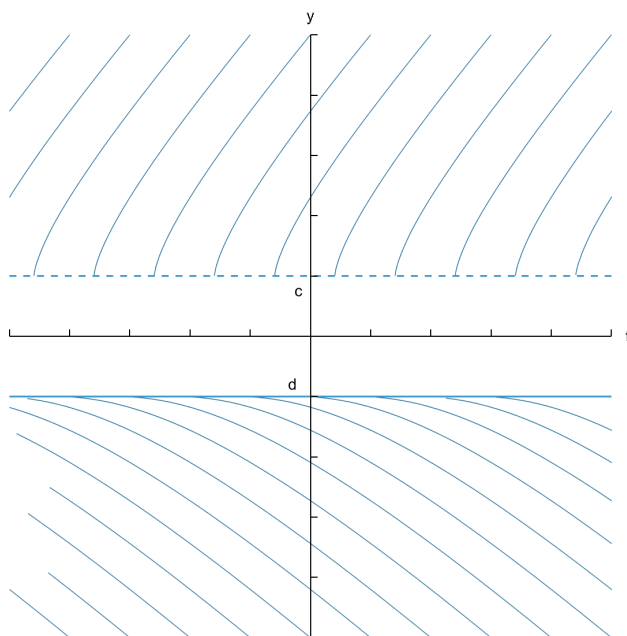
$$\frac{\sqrt{y^2 - 1}}{y - 1} = \sqrt{\frac{y + 1}{y - 1}};$$

para $y < -1$

$$\frac{\sqrt{y^2 - 1}}{y - 1} = -\sqrt{\frac{y + 1}{y - 1}}.$$

Trata-se de uma função positiva para $y > 1$ e negativa para $y < -1$. Tende em módulo para 1 quando $|y| \rightarrow \infty$. Anula-se em -1 e é infinita em 1.

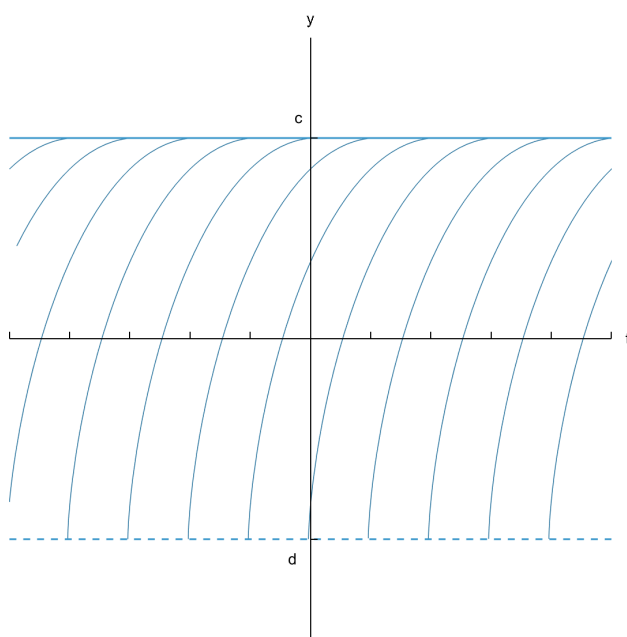




I.1.B. O domínio da função é o conjunto em que $-1 < y \leq 1$.

$$\frac{\sqrt{1-y^2}}{1+y} = \sqrt{\frac{1-y}{1+y}}.$$

Esta função é não negativa. É infinita em -1 e anula-se em 1 .



I.2.A.

$$\mu(y) = \frac{1}{y^3}.$$

$$-\frac{t}{y^2} + 6 \ln y = 1.$$

$$-\frac{T}{+\infty} + 6 \ln(+\infty) = 0 + \infty = +\infty \neq 1.$$

A função $(t, y) \mapsto \frac{y}{2t+6y^2}$ tem como domínio $\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t \neq -3y^2\}$. A condição inicial está na região $t > -3y^2$. Nesta região, quando $y > 0$, y é crescente.

I.2.B.

$$\mu(y) = \frac{1}{y^4}.$$

$$-\frac{t}{y^3} + 9 \ln y = 1.$$

$$-\frac{T}{+\infty} + 9 \ln(+\infty) = 0 + \infty = +\infty \neq 1.$$

A função $(t, y) \mapsto \frac{y}{3t+9y^2}$ tem como domínio $\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t \neq -3y^3\}$. A condição inicial está na região $t > -3y^3$. Nesta região, quando $y > 0$, y é crescente.

I.3.A.

$$y' = 2(1+t)(1+y^2).$$

$$y = \tan\left(\frac{\pi}{4} + (t+1)^2 - 1\right)$$

$$\frac{\pi}{4} + (t+1)^2 - 1 \geq \frac{\pi}{4} - 1 > -\frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} + (t+1)^2 - 1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{se} \quad t = -1 \pm \sqrt{1 + \frac{\pi}{4}} \\ \left] -1 - \sqrt{1 + \frac{\pi}{4}}, -1 + \sqrt{1 + \frac{\pi}{4}} \right[\end{aligned}$$

I.3.B.

$$y' = -2(1+t)(1+y^2).$$

$$y = \tan\left(\frac{\pi}{4} - (t+1)^2 + 1\right)$$

$$\frac{\pi}{4} - (t+1)^2 + 1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{se} \quad t = -1 \pm \sqrt{1 - \frac{\pi}{4}}$$

$$-1 + \sqrt{1 - \frac{\pi}{4}} < 0.$$

$$\frac{\pi}{4} - (t+1)^2 + 1 = -\frac{\pi}{2} \quad \text{se} \quad t = -1 \pm \sqrt{1 + \frac{3\pi}{4}} \\ \left] -1 - \sqrt{1 - \frac{\pi}{4}}, -1 + \sqrt{1 + \frac{3\pi}{4}} \right[.$$

II.1.A.

$$\lambda = -1 \Leftarrow v = (1, -1)$$

$$\lambda = 3 \Leftarrow v = (1, 1)$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{e^{-t} + e^{3t}}{2} & \frac{-e^{-t} + e^{3t}}{2} \\ \frac{-e^{-t} + e^{3t}}{2} & \frac{e^{-t} + e^{3t}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = 0 \quad \text{se} \quad x + 2y = 0.$$

II.1.B.

$$\lambda = -2 \Leftarrow v = (1, 1)$$

$$\lambda = 4 \Leftarrow v = (1, -1)$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{e^{-2t} + e^{4t}}{2} & \frac{e^{-2t} - e^{4t}}{2} \\ \frac{e^{-2t} - e^{4t}}{2} & \frac{e^{-2t} + e^{4t}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\dot{y} = 0 \quad \text{se} \quad -3x + y = 0.$$

II.2.A.

$$D(D-2)y = t \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}(t + t^2) + c_1 + c_2 e^{2t}$$

II.2.B.

$$D(D-4)y = e^{4t} \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}te^{4t} + c_1 + c_2 e^{4t}$$

II.3.A.

$$\operatorname{div} F = 1.$$

Seja

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2, 1 < \sqrt{x^2 + y^2} < 3 \right\}$$

e

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 2, \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2 \right)^2 + (z - 2)^2 < 1 \right\}.$$

Note-se que $\partial\Omega = S \cup A$.

$$\begin{aligned}\iint\int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dV &= \iint_S F \cdot n \, dS + \iint_A F \cdot n \, dS. \\ \iint_A F \cdot n \, dS &= \iint_A z \, dS = 2 \iint_A dS = 2\pi(3^2 - 1^2) = 16\pi. \\ \iint\int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dV &= \iint\int_{\Omega} dV.\end{aligned}$$

Seja $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Uma vez que sobre a superfície do toro

$$z = 2 + \sqrt{1 - (\rho - 2)^2},$$

$$\begin{aligned}\iint\int_{\Omega} dV &= \int_0^{2\pi} \int_1^3 \int_2^{2+\sqrt{1-(\rho-2)^2}} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta \\ &= 2\pi \int_1^3 \sqrt{1 - (\rho - 2)^2} \rho \, d\rho.\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $\rho = 2 + \sin t$,

$$\begin{aligned}2\pi \int_1^3 \sqrt{1 - (\rho - 2)^2} \rho \, d\rho &= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t (2 + \sin t) \cos t \, dt \\ &= 2\pi^2.\end{aligned}$$

$$\iint_S F \cdot n \, dS = 2\pi^2 - 16\pi.$$

II.3.B.

$$\operatorname{div} F = 1.$$

Seja

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3, \, 2 < \sqrt{x^2 + y^2} < 4 \right\}$$

e

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z < 3, \, \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 3 \right)^2 + (z - 3)^2 < 1 \right\}.$$

Note-se que $\partial\Omega = S \cup A$.

$$\begin{aligned}\iint\int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dV &= \iint_S F \cdot n \, dS + \iint_A F \cdot n \, dS. \\ \iint_A F \cdot n \, dS &= \iint_A z \, dS = 3 \iint_A dS = 3\pi(4^2 - 2^2) = 36\pi.\end{aligned}$$

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \, dV = \iiint_{\Omega} dV.$$

Seja $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Uma vez que sobre a superfície do toro

$$z = 3 - \sqrt{1 - (\rho - 3)^2},$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} dV &= \int_0^{2\pi} \int_2^4 \int_{3-\sqrt{1-(\rho-3)^2}}^3 \rho \, dz \, d\rho \, d\theta \\ &= 2\pi \int_2^4 \sqrt{1 - (\rho - 3)^2} \rho \, d\rho. \end{aligned}$$

Fazendo a substituição $\rho = 3 + \sin t$,

$$\begin{aligned} 2\pi \int_2^4 \sqrt{1 - (\rho - 3)^2} \rho \, d\rho &= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t (3 + \sin t) \cos t \, dt \\ &= 3\pi^2. \end{aligned}$$

$$\iint_S F \cdot n \, dS = 3\pi^2 - 36\pi.$$

III.1.A.

$$\operatorname{rot} f(x, y, z) = (-y, -x, 1)$$

$$g(x, y) = (x, y, xy)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} \, dS = (-y, -x, 1) \, dx \, dy$$

$$\iint \operatorname{rot} f(x, y, z) \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} \, dx \, dy = \iint (x^2 + y^2 + 1) \, dx \, dy = \frac{3\pi}{2}$$

III.1.B.

$$\operatorname{rot} f(x, y, z) = (-x, y, 1)$$

$$g(x, y) = \left(x, y, \frac{x^2 - y^2}{2} \right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} \, dS = (-x, y, 1) \, dx \, dy$$

$$\iint \operatorname{rot} f(x, y, z) \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} \, dx \, dy = \iint (x^2 + y^2 + 1) \, dx \, dy = \frac{3\pi}{2}$$

III.2.A.

$$u(x, y) = (\cosh(2x) - 1) \sin(2y) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sinh(nx) \sin(ny).$$

Para $n \neq 2$, tem-se

$$\sinh(na)d_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sin(ny) dy \Leftrightarrow d_n = \frac{2}{\sinh(na)\pi} \int_0^{\pi} f(y) \sin(ny) dy;$$

$$d_2 = \frac{1 - \cosh(2a)}{\sinh(2a)} + \frac{2}{\sinh(2a)\pi} \int_0^{\pi} f(y) \sin(2y) dy.$$

$$(\cosh(2a) - 1) \sin(2y) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sinh(na) \sin(ny) = \sin(y)$$

implica $d_1 \sinh(a) = 1$, $(\cosh(2a) - 1) + d_2 \sinh(2a) = 0$, e os outros d_n 's nulos.

$$u(x, y) = \frac{\sinh x}{\sinh a} \sin y + \frac{1 - \cosh(2a)}{\sinh(2a)} \sinh(2x) \sin(2y) + (\cosh(2x) - 1) \sin(2y).$$

As condições de compatibilidade são para a função f :

$$f(0) = f(\pi) = f''(0) = f''(\pi) = 0.$$

III.2.B.

$$u(x, y) = (\cosh(3x) - 1) \sin(3y) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sinh(nx) \sin(ny).$$

Para $n \neq 3$, tem-se

$$\sinh(na)d_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sin(ny) dy \Leftrightarrow d_n = \frac{2}{\sinh(na)\pi} \int_0^{\pi} f(y) \sin(ny) dy;$$

$$d_3 = \frac{1 - \cosh(3a)}{\sinh(3a)} + \frac{2}{\sinh(3a)\pi} \int_0^{\pi} f(y) \sin(3y) dy.$$

$$(\cosh(3a) - 1) \sin(3y) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sinh(na) \sin(ny) = \sin(2y)$$

implica $d_2 \sinh(2a) = 1$, $(\cosh(3a) - 1) + d_3 \sinh(3a) = 0$, e os outros d_n 's nulos.

$$u(x, y) = \frac{\sinh(2x)}{\sinh(2a)} \sin(2y) + \frac{1 - \cosh(3a)}{\sinh(3a)} \sinh(3x) \sin(3y) + (\cosh(3x) - 1) \sin(3y).$$

As condições de compatibilidade são para a função f :

$$f(0) = f(\pi) = f''(0) = f''(\pi) = 0.$$