Análise Matemática IV

1º Teste - 19 de Abril de 97

Civ., Fís. e Matem.

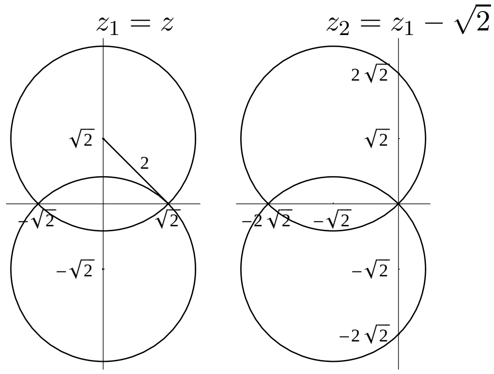
Resolução

1.

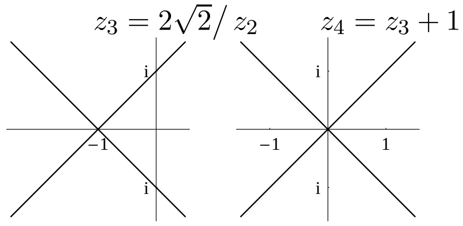
a) Em $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$, a função log tem derivadas parciais contínuas em ordem a r e a θ e satisfaz as equações de Cauchy-Riemann: $\frac{\partial}{\partial r} \log z = -\frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \log z = \frac{1}{r}$; portanto é analítica.
Em $r > 0$ e $\theta = \pi$, a função log é descontínua; portanto não é analítica.

b) $z(\theta) = e^{i\theta}$, com $-\pi < \theta \leq \pi$, é uma parametrização da circunferência de raio um, centrada na origem.
$\int_{|z|=1} \log z \, dz = \int_{-\pi}^{\pi} \log z(\theta)\, z'(\theta)\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} i\theta\, ie^{i\theta}\, d\theta = -\int_{-\pi}^{\pi} \theta e^{i\theta}\, d\theta = i\theta e^{i\theta}\Big|_{-\pi}^{\pi} - i \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta}\, d\theta = i\theta e^{i\theta}\Big|_{-\pi}^{\pi} - e^{i\theta}\Big|_{-\pi}^{\pi} = -2\pi i.$

2.

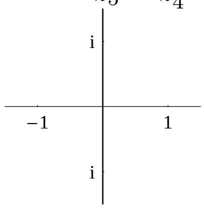


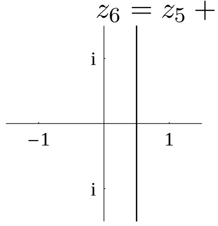
Leva-se um dos pontos de intersecção das circunferências para a origem.



Inverte-se ($z \mapsto \frac{2\sqrt{2}}{z}$). O ponto 0 é transformado em ∞, o ponto $-2\sqrt{2}$ é transformado em -1, o ponto $2\sqrt{2}i$ é transforamdo em $-i$ e o ponto $-2\sqrt{2}i$ é transforamdo em i. As circunferências são transformadas em rectas.

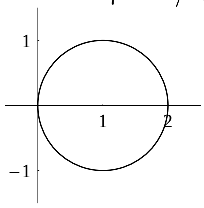
$z_5 = z_4^2$ $z_6 = z_5 + 1/2$

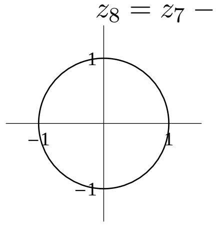




$z \mapsto z^2$ permite transformar um quadrante num semiplano. O semiplano é deslocado para a direita de modo a que a recta que o limita não passe pela origem.

$z_7 = 1/z_6$ $z_8 = z_7 - 1$





Inverte-se ($z \mapsto \frac{1}{z}$). O ponto ∞ é transformado em 0 e o ponto $\frac{1}{2}$ é transformado em 2. A recta $\operatorname{Re} z_6 = \frac{1}{2}$ é transformada na circunferência $|z_7 - 1| = 1$.

Compondo as transformações acima obtém-se $z_8 = \frac{1}{\left(\frac{2\sqrt{2}}{z-\sqrt{2}}+1\right)^2+\frac{1}{2}} - 1$.

3.

a) $\operatorname{Res}\frac{1}{z(z-1)}\Big|_{z=0} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z-1} = -1.$

$\operatorname{Res}\frac{1}{z(z-1)}\Big|_{z=1} = \lim_{z\to 1} \frac{1}{z} = 1.$

$\int_C \frac{1}{z(z-1)}\,dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}\frac{1}{z(z-1)}\Big|_{z=0} + \operatorname{Res}\frac{1}{z(z-1)}\Big|_{z=1} \right) = 0.$

b) O Teorema de Cauchy afirma que os integrais de funções analíticas num domínio Ω, ao longo de caminhos homotópicos em Ω, são iguais. Portanto o valor do integral não depende de r.

$\left|\int_C \frac{1}{z(z-1)}\,dz\right| \le \int_C \frac{1}{|z|(|z|-1)}|dz| = \int_C \frac{1}{r^2-r}|dz| = \frac{2\pi r}{r^2-r} \to 0$, quando $r \to +\infty$, onde se usou o facto de $|z-1| \ge |z| - 1$ para $|z| > 1$. Logo, $\int_C \frac{1}{z(z-1)}\,dz = 0$.

c) Seja Ω um domínio em $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$, contínua. Sabemos que f é a derivada de uma função analítica sse o integral de f ao longo de qualquer contorno fechado em Ω é nulo.

$\int_{|z-1|=1} \frac{1}{z-1}\,dz = 2\pi i \ne 0.$

Concluimos que $z \mapsto \frac{1}{z-1}$ não é a derivada de uma função analítica em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

d) Se γ é um contorno de Jordan fechado em $\mathbb{C}\setminus[0,1]$, descrito no sentido directo, então γ é homotópica à curva C do enunciado (supondo C descrita no sentido directo) ou γ é homotópica a um ponto, pelo que $\int_\gamma \frac{1}{z(z-1)}\,dz = \int_C \frac{1}{z(z-1)}\,dz = 0$.
Conclui-se que os integrais de $\frac{1}{z(z-1)}$ ao longo de contornos fechados em $\mathbb{C}\setminus[0,1]$ são nulos.
Portanto, $z \mapsto \frac{1}{z(z-1)}$ é a derivada de uma função analítica em $\mathbb{C}\setminus[0,1]$.

4. Designe-se por n a parte inteira de α, ou seja, o natural tal que $\alpha - 1 < n \le \alpha$. Vamos provar que a derivada de ordem $n+1$ de f é identicamente nula.
Seja $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$. Pela fórmula integral de Cauchy,
$f^{(n+1)}(a) = \frac{(n+1)!}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+2}}\,dz$.
$|f^{(n+1)}(a)| \le \frac{(n+1)!}{2\pi}\int_{|z-a|=r} \frac{|f(z)|}{|z-a|^{n+2}}\,|dz| \le \frac{(n+1)!}{2\pi}\int_{|z-a|=r} \frac{c(1+|z|^\alpha)}{|z-a|^{n+2}}\,|dz|$
$\le \frac{(n+1)!}{2\pi}\int_{|z-a|=r} \frac{c[1+(r+|a|)^\alpha]}{r^{n+2}}\,|dz| = \frac{(n+1)!}{2\pi}\frac{c[1+(r+|a|)^\alpha]}{r^{n+2}}\,2\pi r \sim c\,(n+1)!\,\frac{r^{\alpha+1}}{r^{n+2}} \to 0$,
quando $r \to +\infty$. Logo, $f^{(n+1)}(a) = 0$. Como a é arbitrário, $f^{(n+1)} \equiv 0$.
Integrando $n+1$ vezes, conclui-se que f é um polinómio de grau menor ou igual a n.