Análise Matemática IV

1º Teste - 4 de Maio de 96

Fís. e Matem.

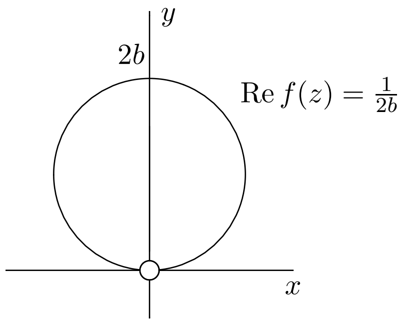
Resolução

1.

a) $f(z) = -\frac{i}{\bar{z}} = -\frac{i}{x-iy} = -\frac{i(x+iy)}{x^2+y^2} = \frac{y-ix}{x^2+y^2}$.
$(F_1(x,y), F_2(x,y)) = (\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2})$.

b) $f[f(z)] = f(-\frac{i}{\bar{z}}) = -\frac{i}{i/z} = -z$.

c) Se $z = re^{i\theta}$, então $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{r}e^{i\theta}$. Sabemos também que uma transformação linear fraccionária transforma "circunferências"em "circunferências." A imagem da recta $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2b}$ por $\frac{1}{\bar{z}}$ é uma circunferência. A circunferência passa por zero e $2b$, e é simétrica em relação ao eixo dos x. A imagem da recta $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2b}$ por $\frac{i}{\bar{z}}$ é obtida rodando esta circunferência em torno da origem, no sentido directo, $\frac{\pi}{2}$ radianos.



A imagem da recta $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2b}$ por $\frac{i}{\bar{z}}$.

d) $g'(z) = u_x + iv_x$. $|g'(z)|^2 = u_x^2 + v_x^2 = u_x v_y - v_x u_y = \det DG(x,y)$.

e) Se $g = \bar{f}$, então $G = (u,v) = (F_1, -F_2)$, pelo que $\det DG(x,y) = -\det DF(x,y)$.
Note-se que $\bar{f}$ é analítica, já que $\bar{f}(z) = \frac{i}{z}$. Então $|(\bar{f})'(z)|^2 = |g'(z)|^2 = \det DG(x,y) = -\det DF(x,y)$.
Como $g'(z) = -\frac{i}{z^2}$, $|g'(z)|^2 = \frac{1}{|z|^4}$.

2.

a) $\int_C o \cdot o \, ds = \int_C (y^2 + x^2)\, ds = \int_C 1\, ds = 2\pi$.
$\int_{g^{-1}(C)} g^\star o = \int_0^{2\pi} (-\sin\theta \, d\cos\theta + \cos\theta \, d\sin\theta) = \int_0^{2\pi} (\sin^2\theta \, d\theta + \cos^2\theta \, d\theta) = \int_0^{2\pi} 1\, d\theta = 2\pi$.

b) $\left[\frac{\phi}{||\phi||}\right]^\star o = -\frac{\phi_v}{||\phi||} d\frac{\phi_u}{||\phi||} + \frac{\phi_u}{||\phi||} d\frac{\phi_v}{||\phi||} = -\frac{\phi_v}{||\phi||^2} d\phi_u - \frac{\phi_v\phi_u}{||\phi||} d\frac{1}{||\phi||} + \frac{\phi_u}{||\phi||^2} d\phi_v + \frac{\phi_u\phi_v}{||\phi||} d\frac{1}{||\phi||} = \frac{1}{||\phi||^2} \cdot (-\phi_v \, d\phi_u + \phi_u \, d\phi_v) = \frac{1}{||\phi||^2} \cdot [\phi^\star o]$.

c) Como ϕ é de classe C^2, $d\left[\phi^\star\left(\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}\right)\right]=\phi^\star d\left(\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}\right)=\phi^\star 0=0$.

d) Se ϕ nunca se anula em Ω, então $\omega=\frac{-\phi_v\,d\phi_u+\phi_u\,d\phi_v}{\phi_u^2+\phi_v^2}$ é uma forma fechada em Ω. Pelo Teorema de Stokes, $i=\int_{\partial\Omega}\omega=\iint_\Omega d\omega=0$. (Se ϕ se anula em Ω, então ω não está definida em Ω.)

e) Seja $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ uma parametrização de uma componente de $\partial\Omega$ compatível com $\bar{o}$ (isto é, tal que $\left(\frac{\alpha'}{||\alpha'||}\right)^\star=\bar{o}\circ\alpha$). (Nota: em rigor, $\alpha|_{]a,b[}$ é uma parametrização da componente em causa de $\partial\Omega$ com um ponto removido.) $i=\int_a^b\alpha^\star\frac{-\phi_v\,d\phi_u+\phi_u\,d\phi_v}{\phi_u^2+\phi_v^2}=\int_a^b\frac{-(\phi_v\circ\alpha)\,d(\phi_u\circ\alpha)+(\phi_u\circ\alpha)\,d(\phi_v\circ\alpha)}{(\phi_u\circ\alpha)^2+(\phi_v\circ\alpha)^2}=\int_{\phi(\partial\Omega)}\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}$, pela definição de integral de linha, já que $\phi\circ\alpha$ é um caminho cujo contradomínio é $\phi(\partial\Omega)$.
i é o produto de 2π pelo número de rotação de $\phi(\partial\Omega)$ em torno de zero.

f) Designamos $\nabla\psi$ por (ψ_u,ψ_v). (Nota: Assim, índices em ψ designam derivadas parciais, enquanto índices em ϕ designam componentes.)
$n=\frac{\nabla\psi}{||\nabla\psi||}$, $\bar{o}=-\frac{\psi_v}{||\nabla\psi||}\,du+\frac{\psi_u}{||\nabla\psi||}\,dv$. Vamos supor que esta é a normal exterior. Se for a interior numa componente conexa de $\partial\Omega$, substitui-se ψ por $-\psi$ nessa componente.
Da alínea b), $n^\star o=\frac{1}{||\nabla\psi||^2}(-\psi_v\,d\psi_u+\psi_u d\psi_v)$
$=\frac{1}{||\nabla\psi||^2}(-\psi_v\psi_{uu}\,du-\psi_v\psi_{uv}\,dv+\psi_u\psi_{vu}\,du+\psi_u\psi_{vv}\,dv)$
$=\frac{1}{||\nabla\psi||^2}(-\psi_v\psi_{uu}+\psi_u\psi_{vu})du+\frac{1}{||\nabla\psi||^2}(-\psi_v\psi_{uv}+\psi_u\psi_{vv})dv$.
$n^\star o\cdot\bar{o}=\frac{\psi_v^2\psi_{uu}-2\psi_u\psi_v\psi_{uv}+\psi_u^2\psi_{vv}}{||\nabla\psi||^3}$.