Análise Matemática IV

1º Teste - 28 de Outubro de 2006

LEBM + LEC + LEFT + LEGM + LMAC

Resolução

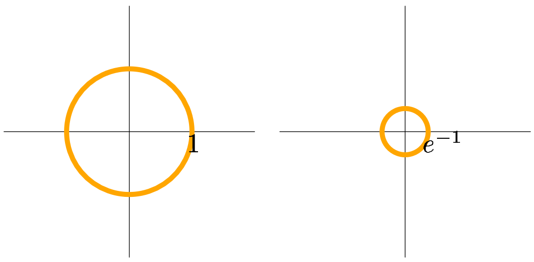
1.

a) $f(re^{i\theta}) = \frac{re^{-r}}{re^{i\theta}} = e^{-r-i\theta}$.

b) Como $f_r = -e^{-r-i\theta}$ e $f_\theta = -ie^{-r-i\theta}$, vem $f_r = -\frac{i}{r} f_\theta \Leftrightarrow -e^{-r-i\theta} = -\frac{1}{r}e^{-r-i\theta} \Leftrightarrow r = 1$. Ou seja, a função f satisfaz a equação de Cauchy-Riemann sobre $r = 1$. Por outro lado, como a função f tem derivadas parciais contínuas é diferenciável (em todo o seu domínio) como função de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ em $\mathbb{R}^2$. Conclui-se que a função complexa f é diferenciável em $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Neste conjunto, $f' = e^{-i\theta} f_r = -e^{-1}e^{-2i\theta}$, ou seja, $f'(z) = -\frac{e^{-1}}{z^2}$ para $|z| = 1$.

c) Seja $\alpha : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, definida por $\alpha(\theta) = \pi e^{i\theta}$. Por definição, $\int_{|z|=\pi} f(z)\,dz = \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha(\theta))\alpha'(\theta)\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi e^{-\pi}}{\pi e^{i\theta}} i\pi e^{i\theta}\,d\theta = 2\pi^2 e^{-\pi} i$. *Em alternativa*, $\int_{|z|=\pi} f(z)\,dz = \int_{|z|=\pi} \frac{|z|e^{-|z|}}{z}dz = \pi e^{-\pi} \int_{|z|=\pi} \frac{1}{z}dz = 2\pi^2 e^{-\pi} i$.

d)



Os planos z e $f(z)$.
A circunferência no plano $f(z)$ é percorrida no sentido dos ponteiros do relógio.

e) O contradomínio de f é $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$. De facto, f transforma circunferências de raio r em circunferências de raio e^{-r}, e $r > 0 \Leftrightarrow 0 < e^{-r} < 1$.

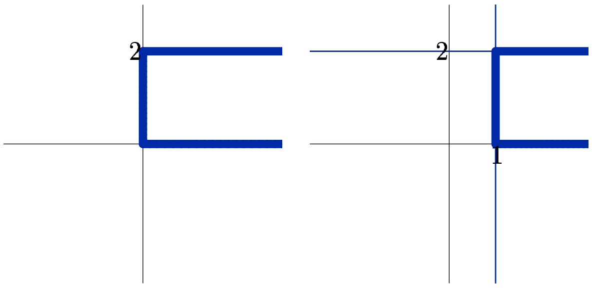
2.

a) Pela Fórmula Integral de Cauchy,

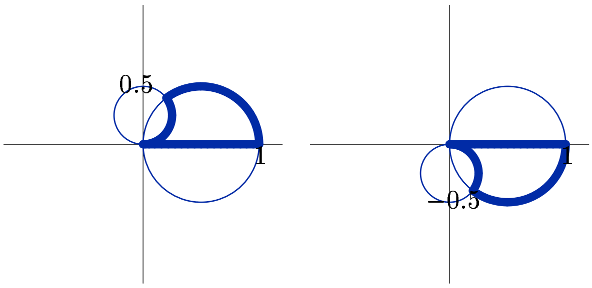
$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z+1)^3(z-3)} = \frac{2\pi i}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{z-3}\bigg|_{z=-1} = \frac{2\pi i}{(z-3)^3}\bigg|_{z=-1} = -\frac{\pi}{32} i.$$

b) Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, o integral das duas primeiras parcelas é zero porque essas parcelas são as derivadas das funções $\frac{3}{2(z+3)^2}$ e $\frac{2}{z+2}$, holomorfas em $\mathbb{C} \setminus \{-3\}$ e $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$, respectivamente. Pelo Teorema de Cauchy, o integral das três últimas parcelas é zero porque essas parcelas são funções inteiras. Logo, o resultado pretendido é igual ao integral da terceira parcela, que (por cálculo directo, ou pela Fórmula Integral de Cauchy) vale $-2\pi i$.

3.



Os planos z e $z+1$.



Os planos $\frac{1}{\overline{z+1}}$ e $\frac{1}{z+1}$.

Resposta: $\left\{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}, |z + \frac{i}{4}| > \frac{1}{4}, \text{ e } \Im z < 0\right\}$.

4.

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g(z) + (z-a)g'(z)}{(z-a)g(z)} = \frac{1}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Sendo g inteira, g' é inteira e, como por hipótese g nunca se anula, g'/g é inteira. Assim, $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \int_\gamma \frac{1}{z-a}\, dz = 2\pi i\, n(\gamma, a)$, porque pelo Teorema de Cauchy $\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz = 0$.