Análise Matemática IV

1º Teste - 19 de Abril de 97

Civ., Fís. e Matem.

Duração: 90 minutos

Apresente os cálculos

1. Seja $z = re^{i\theta}$, com $r > 0$ e $-\pi < \theta \leq \pi$, e $\log z = \ln r + i\theta$.

a) Determine a região de analiticidade da função logarítmo. Justifique, usando as equações de Cauchy-Riemann na forma polar. (2.5)

b) Usando a definição, calcule $\int_{|z|=1} \log z \, dz$. (2.5)

2. Determine uma aplicação bijectiva e analítica de $\{z \in \mathbb{C} : |z - \sqrt{2}\, i| < 2 \text{ e } |z + \sqrt{2}\, i| < 2\}$ em $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. (2.5)

3. Seja $r > 1$ e $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$.

a) Calcule $\int_C \frac{1}{z(z-1)}\, dz$, usando o Teorema dos Resíduos. (2.5)

b) Obtenha o resultado da alínea anterior usando o Teorema de Cauchy e majorando o módulo do integral para r grande. (2.5)

c) Prove que $z \mapsto \frac{1}{z-1}$ não é a derivada de uma função analítica em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. (2.5)

d) Prove que $z \mapsto \frac{1}{z(z-1)}$ é a derivada de uma função analítica em $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$. (2.5)

4. Seja f uma função inteira tal que $|f(z)| \leq c(1 + r^\alpha)$ se $|z| = r$, onde c e α pertencem a $\mathbb{R}^+$. O que pode afirmar quanto a f? *Sugestão:* Prove uma generalização do Teorema de Liouville. (2.5)