Análise Matemática IV

1º Teste - 4 de Maio de 96

Fís. e Matem.

Duração: 90 min. + 20 min. de tol.

Apresente os cálculos

1. Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = -i/\bar{z}$. Escrevemos $z = x + iy$, com x e $y \in \mathbb{R}$, e $f(x + iy) = F_1(x, y) + iF_2(x, y)$, com F_1 e F_2 campos escalares reais.

a) Determine F_1 e F_2. (2)

b) Verifique que $f[f(z)] = -z$, ou seja, que $f \circ f = -\mathrm{id}$. (2)

c) Seja $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Determine a imagem da recta $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \frac{1}{2b}\}$ por $-f$. (2)

d) Suponha que g é analítica, $g(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, com u e v campos escalares reais. Seja $G = (u, v)$. Verifique que $|g'(z)|^2 = \det DG(x, y)$. (2)

e) Seja $F = (F_1, F_2)$. Aplique o resultado da alínea anterior a $g = \bar{f}$ para obter $\det DF(x, y) = -|(\bar{f})'(z)|^2 = -\frac{1}{|z|^4}$. (1)

***2.** Seja $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, com orientação o, definida por $o(x, y) = -y\,dx + x\,dy$. Seja $g :]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$, definida por $g(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$.

a) Como sabe, $\int_C o = \int_C o \cdot o\,ds$ e $\int_C o = \int_{g^{-1}(C)} g^\star o$. Calcule directamente $\int_C o \cdot o\,ds$ e $\int_{g^{-1}(C)} g^\star o$. (3)

Seja Ω um domínio regular em $\mathbb{R}^2$ e $\phi : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^2. Designamos ϕ por (ϕ_u, ϕ_v).

b) Verifique que $\left[\frac{\phi}{||\phi||}\right]^\star o = \frac{1}{||\phi||^2} \cdot [\phi^\star o]$. (2)

Sugestão: $\left[\frac{\phi}{||\phi||}\right]^\star o = -\frac{\phi_v}{||\phi||}\, d\frac{\phi_u}{||\phi||} + \frac{\phi_u}{||\phi||}\, d\frac{\phi_v}{||\phi||}$. Ora, $d\frac{\phi_u}{||\phi||} = \frac{1}{||\phi||}\, d\phi_u + \phi_u\, d\frac{1}{||\phi||}$ e $d\frac{\phi_v}{||\phi||} = \frac{1}{||\phi||}\, d\phi_v + \phi_v\, d\frac{1}{||\phi||}$. *Não* calcule $d\frac{1}{||\phi||}$.

Portanto, $\left[\frac{\phi}{||\phi||}\right]^\star (-y\,dx + x\,dy) = \frac{-\phi_v\,d\phi_u + \phi_u\,d\phi_v}{\phi_u^2 + \phi_v^2} = \phi^\star\left(\frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}\right)$.

c) Verifique que $d\left[\phi^\star\left(\frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}\right)\right] = 0$. (2)

Suponha que ϕ não se anula sobre $\partial\Omega$. Seja $i = \int_{\partial\Omega} \frac{-\phi_v\,d\phi_u + \phi_u\,d\phi_v}{\phi_u^2 + \phi_v^2}$, onde $\partial\Omega$ tem orientação $\bar{o}$, induzida por n, a normal unitária exterior a Ω.

d) Se $i \neq 0$, então $\phi = 0$ para algum ponto de Ω. Justifique. (2)

Sugestão: Use o Teorema de Stokes.

e) Interprete i em termos do número de rotação. Justifique. (1)

Suponha agora que $\phi = \nabla\psi$, onde $\psi : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2, e $\psi = c$ é uma representação cartesiana de $\partial\Omega$, para um certo $c \in \mathbb{R}$. A curvatura de $\partial\Omega$ é $k \overset{\triangle}{=} n^\star o \cdot \bar{o}$.

f) Calcule k em termos das derivadas de ψ. (1)