

Análise Matemática IV
1º Teste - 28 de Outubro de 2006
LEBM + LEC + LEFT + LEGM + LMAC

Duração: 90 minutos
Apresente os cálculos

1. Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$f(z) = \frac{|z|e^{-|z|}}{z}.$$

- a) Calcule $f(re^{i\theta})$ em termos de $r > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$. (1)
- b) Usando a equação de Cauchy-Riemann na forma polar, $f_r = -\frac{i}{r}f_\theta$, e $f' = e^{-i\theta}f_r$, estude a diferenciabilidade de f e calcule $f'(z)$ quando existir, apresentando o resultado em termos de z . (2.5)
- c) Calcule $\int_{|z|=\pi} f(z) dz$. (2)
- d) Represente geometricamente a imagem da circunferência de centro na origem e raio 1, $r = 1$, percorrida no sentido directo, por f . (1)
- e) Determine o contradomínio de f . (1)

2. Calcule justificando, sem usar o Teorema dos Resíduos,

- a) (3)

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z+1)^3(z-3)}.$$

- b) (3)

$$\int_{|z|=4} \left[\frac{-3}{(z+3)^3} + \frac{-2}{(z+2)^2} + \frac{-1}{z+1} + \pi + (z-1) + 2(z-2)^2 \right] dz.$$

3. Determine geometricamente a imagem da região $\{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0 \text{ e } 0 < \Im z < 2\}$ pela transformação $z \mapsto \frac{1}{z+1}$. (4.5)

4. Seja $a \in \mathbb{C}$, g inteira e sempre diferente de zero, γ uma curva fechada que não passa por a , e $f(z) = (z-a)g(z)$. Determine o valor de $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$. Justifique. (2)